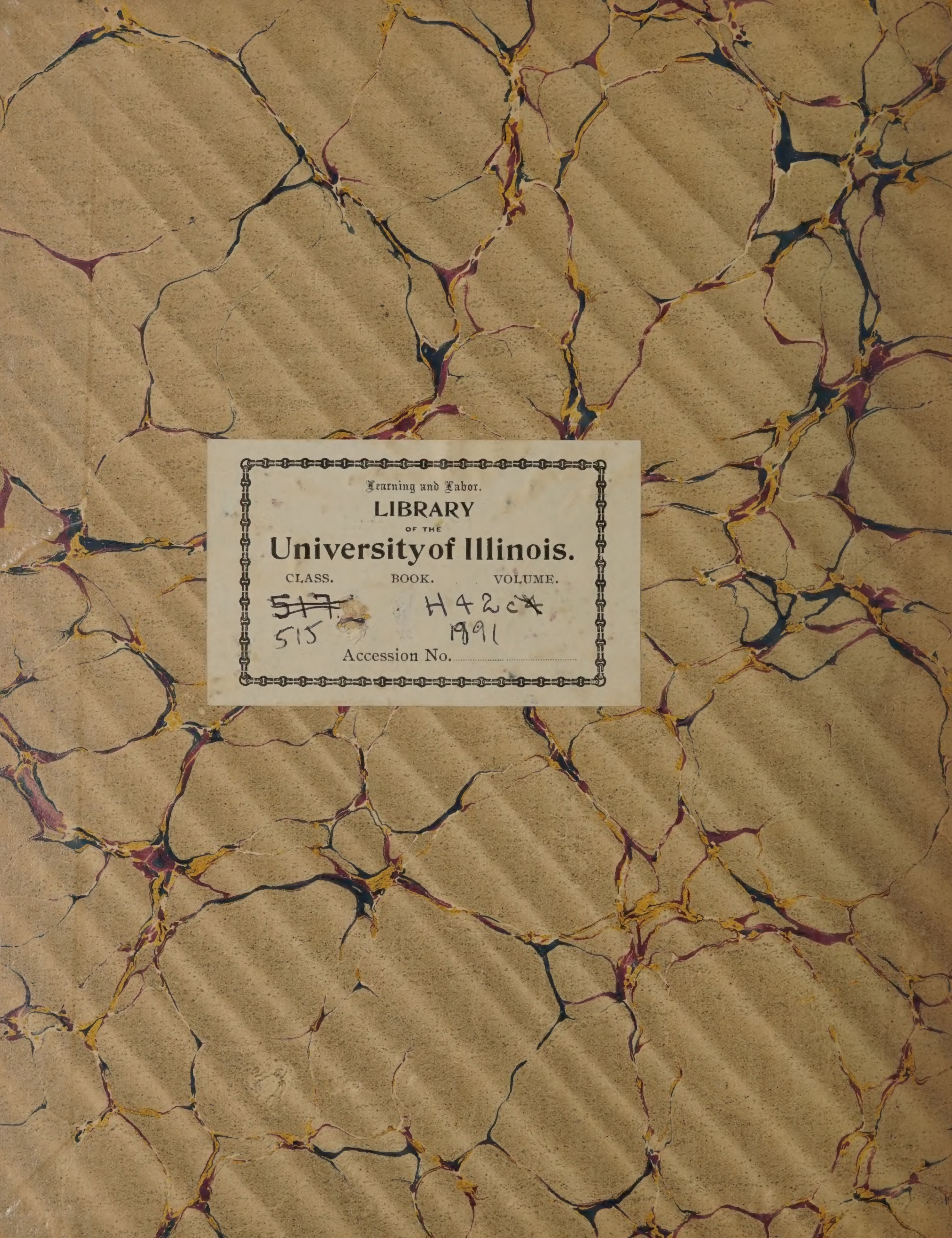






FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

COURS

DE M. HERMITE

Rédigé en 1882 par M. ANDOYER,

Élève à l'École normale.

Quatrième édition, revue et augmentée.

FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

COURS
DE M. HERMITE

Rédigé en 1882 par M. ANDOYER, élève à l'École normale.

Quatrième édition, revue et augmentée.

PARIS
LIBRAIRIE SCIENTIFIQUE A. HERMANN
8, Rue de la Sorbonne, 8

1891

TABLE DES MATIÈRES

ADDITIONS

Bordeaux. — Imp. G. Gounouilhou, rue Guiraude, 11.

Paris 1888

COURS PROFESSÉ A LA FACULTÉ DES SCIENCES

par

M. Hermite.

4e Edition.

revue par l'auteur.

1ère Leçon.

Les applications du calcul intégral à la géométrie concernent tout d'abord la quadrature et la rectification des courbes planes. En abordant ces questions, le premier point consiste à définir d'une manière précise ce qu'on doit entendre par l'aire d'un segment de courbe et la longueur d'un arc; quantités qui ont été introduites et qu'on a longtemps considérées comme des notions premières irréductibles à d'autres plus simples.

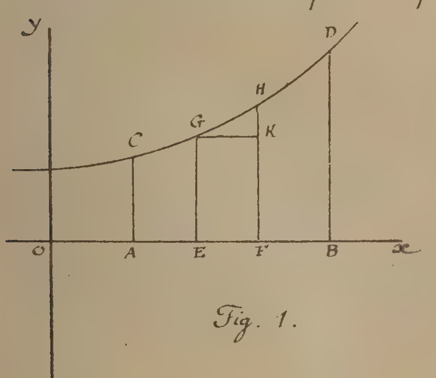


Fig. 1.

Soit $y = f(x)$ une courbe rapportée à des coordonnées rectangulaires, AC et BD deux ordonnées qui correspondent aux abscisses, $OA = x_0$, $OB = X$, voici en premier lieu la définition de l'aire ABCD.

Nommons, $x_1, x_2, \ldots\ldots x_{n-1}$, des valeurs croissantes de x, comprises entre x_0 et X; ce sera la limite de la somme

$$(x_1 - x_0) f(x_0) + (x_2 - x_1) f(x_1) + \cdots\cdots + (X - x_{n-1}) f(x_{n-1})$$

lorsque les n différences $x_1 - x_0$, $x_2 - x_1$, ... $X - x_{n-1}$, deviennent plus petites que toute quantité donnée.

Faisons: $y_i = f(x_i)$ et $x_n = X$, nous écrirons cette expression sous une forme plus abrégée.

$$\Sigma (x_{i+1} - x_i)\, y_i \qquad \{ i = 0, 1, 2, \ldots\ldots n-1 \}$$

nous remarquerons aussi qu'en prenant $OE = x_i$, $OF = x_{i+1}$ et menant les ordonnées EG, FH, un terme quelconque $(x_{i+1} - x_i)\, y_i$ est la surface du rectangle EFGK, où GK est parallèle à l'axe Ox; la limite de la somme de ces rectangles sera donc la définition géométrique de l'aire du segment.

Considérons, en second lieu, le polygone inscrit dans la courbe CD, dont les sommets ont pour coordonnées x_i, y_i; la longueur de l'arc CD sera considérée comme la limite de la somme:

$$\Sigma[(x_{i+1}-x_i)^2+(y_{i+1}-y_i)^2]^{\frac{1}{2}},$$

qui en représente le périmètre, lorsque semblablement on fait décroître indéfiniment toutes les différences $x_{i+1}-x_i$.

Ces deux définitions conduisent à la même question d'analyse qui se présente dans la première sous la forme la plus simple, son objet étant alors de démontrer l'existence d'une limite unique déterminée par la somme.

$$S=\Sigma(x_{i+1}-x_i)y_i.$$

Voici la solution qu'en a donné Cauchy dans la 21e leçon du Cours d'analyse de l'École Polytechnique.

Nous admettrons que la fonction $f(x)$ soit continue, en entendant la continuité dans ce sens que la variable croissant de $x=x_0$ à $x=X$, $f(x)$ prend successivement toutes les valeurs comprises entre $f(x_0)$ et $f(X)$. Si l'on désigne une telle valeur par Y, on peut donc poser:

$$Y=f(\xi),$$

ξ étant une abscisse comprise entre x_0 et X, ce qui permet d'écrire:

$$\xi=x_0+\theta(X-x):$$

où θ désigne un nombre positif moindre que l'unité.

Cela étant, je remarque qu'on obtient une limite inférieure et une limite supérieure à S, si l'on remplace les ordonnées y_i par la plus petite et la plus grande d'entre elles. Soit donc Y_1 une quantité intermédiaire entre ces ordonnées minima et maxima on aura:

$$S=Y\Sigma(x_{i+1}-x_i)$$
$$=Y(X_0-x),$$

ou bien d'après ce que nous venons de dire:

$$S=f[x_0+\theta(X-a)](X-x).$$

Ceci posé, partageons chacun des intervalles x_1-x_0, x_2-x_3, etc, en d'autres plus petits, et nommons S_1 la nouvelle somme qui résulte de ces décompositions. A chacun des termes, $(x_1-x_0)f(x_0)$, $(x_2-x_1)f(x_1)$ etc, on devra substituer des sommes partielles, dont les valeurs, d'après ce qui vient d'être établi, seront en désignant par θ_0, θ_1, etc, des nombres moindres que l'unité:

$$(x_1-x_0)f[x_0+\theta_0(x_1-x_0)]$$
$$(x_2-x_1)f[x_1+\theta_1(x_2-x_1)]$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

et nous pouvons par conséquent écrire:

$$S_1=\Sigma(x_{i+1}-x_i)f[x_i+\theta_i(x_{i+1}-x_i)]$$

Cette expression rend facile l'évaluation de la différence S_1-S; qu'on fasse en effet:

$$f[x_i+\theta_i(x_{i+1}-x_i)]=f(x_i)+\varepsilon_i,$$

on obtient:

$$S_1=S+\Sigma(x_{i+1}-x_i)\varepsilon_i,$$

d'où résulte, en supposant η compris entre la plus petite et la plus grande des quantités ε_i.

$$S_1 - S = (X - x_0)\,\eta.$$

Nous voyons ainsi que $S_1 - S$ peut devenir moindre que toute quantité donnée, puisque $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots\ldots \varepsilon_{n-1}$, et par conséquent η diminuent autant qu'on le veut en prenant les différences $x_{i+1} - x_i$ suffisamment petites.

Enfin, Cauchy ajoute que quelque soit le mode de division de l'intervalle $X - x_0$, on parviendra à la même limite en faisant décroître indéfiniment ces divisions. Soit, en effet S et S_1 les sommes qui correspondent à deux lois différentes de décroissement, on établit que la différence $S - S_1$ a zéro pour limite, en considérant un troisième mode de division, dans lequel entrent toutes les valeurs interposées entre x_0 et X qui figurent dans le premier et dans le second. Qu'on nomme S_2 la somme qui correspond à ce troisième mode, nous venons de voir que les différences $S - S_2$ et $S_1 - S_2$ peuvent devenir plus petites que toute quantité donnée, il en est donc de même de $S - S_1$.

La notion géométrique de l'aire d'une courbe que nous venons d'obtenir et la notion analytique correspondante d'intégrale définie, nous donnent comme conséquence facile la définition sous le même point de vue de la longueur d'un arc. Effectivement le périmètre du polygone inscrit, qui est exprimé par la somme.

$$S = \Sigma\left[(x_{i+1} - x_i)^2 + (y_{i+1} - y_i)^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

étant écrit de cette manière:

$$S = \Sigma\left[1 + \left(\frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}(x_{i+1} - x_i),$$

il suffit de remarquer qu'en faisant décroître indéfiniment $x_{i+1} - x_i$, la quantité $\left[1 + \left(\frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}$ devient à la limite la valeur de $\sqrt{1 + f'^2(x)}$ pour $x = x_i$. Nous obtenons ainsi l'expression même de l'aire de la courbe $y = \sqrt{1 + f'^2(x)}$ de sorte que l'aire et l'arc seront représentées par les formules suivantes. Choisissons parmi tous les modes de décroissement des différences $x_{i+1} - x_i$, le plus simple en les supposant égales à une même quantité infiniment petite dx, on pourra écrire en introduisant le signe $\int$ au lieu de Σ:

$$S = \int_{x_0}^{X} f(x)\,dx$$

$$S = \int_{x_0}^{X} \sqrt{1 + f'^2(x)}\,dx.$$

J'ajouterai seulement à l'égard de la définition de l'arc cette remarque.

Considérons un côté quelconque GH du polygone inscrit dans l'arc S, et une tangente à la courbe en un point I pris arbitrairement entre G et H. La portion JK de cette tangente, comprise entre les ordonnées GE et HF, a la même projection sur l'axe des abscisses que la corde GH; de sorte qu'en nommant φ et ψ les angles de la corde et de la tangente avec l'axe, on a la relation:

Fig. 2

$$GH \cos\varphi = JK \cos\psi.$$

Le rapport $\frac{GH}{JK}$ a donc pour limite l'unité, la différence $\varphi - \psi$ étant infiniment petite, et d'après la proposition concernant la substitution les uns aux autres d'infiniments petits dans les limites de sommes, il est permis de remplacer les cotés du polygone inscrit

par la série des segments JK qui ne sont point contigus les uns aux autres; cette remarque nous sera utile plus tard.

La première application de la formule relative aux quadratures aura pour objet la détermination de l'aire des courbes du second degré. Nous partirons de l'expression générale de l'ordonnée:

$$y = \alpha x + \beta + \sqrt{ax^2+2bx+c}$$

qui donne en premier lieu:

$$S = \tfrac{1}{2}\alpha x^2 + \beta x + \gamma + \int \sqrt{ax^2+2bx+c}\; dx,$$

en désignant par γ une constante arbitraire. Soit ensuite $R = ax^2+2bx+c$, le calcul de l'intégrale $\int\sqrt{R}\,dx$ s'effectue comme il suit:

Je remarque qu'on peut écrire:

$$aR = (ax+b)^2 - b^2 + ac;$$

employant ensuite l'identité:

$$D_x[(ax+b)\sqrt{R}] = a\sqrt{R} + \frac{(ax+b)^2}{\sqrt{R}}$$

$$= \frac{aR + (ax+b)^2}{\sqrt{R}}$$

ou bien:

$$D_x[(ax+b)\sqrt{R}] = \frac{2aR + b^2 - ac}{\sqrt{R}}$$

on en déduit:

$$(ax+b)\sqrt{R} = 2a\int\sqrt{R}\,dx + (b^2-ac)\int\frac{dx}{\sqrt{R}}$$

L'intégrale proposée est donc ramenée à un terme algébrique et à la quantité connue $\int\frac{dx}{\sqrt{R}}$; ce qui donne:

$$\int\sqrt{R}\,dx = \frac{ax+b}{2a}\sqrt{R} - \frac{b^2-ac}{2a\sqrt{a}}\log(ax+b+\sqrt{aR}).$$

Dans le cas de l'ellipse où l'on suppose $a<0$, le logarithme porte sur une quantité imaginaire; voici la réduction à une forme explicitement réelle.

Soit en mettant en évidence la partie réelle et la partie imaginaire;

$$ax+b+\sqrt{aR} = p + iq,$$

on aura:

$$ax+b-\sqrt{aR} = p - iq$$

et par conséquent

$$(ax+b)^2 - aR = p^2 + q^2$$

ou bien:

$$b^2 - ac = p^2 + q^2$$

Posons maintenant, en observant que b^2-ac est positif.

$$\cos\theta = \frac{p}{\sqrt{b^2-ac}} = \frac{ax+b}{\sqrt{b^2ac}}$$

$$\sin\theta = \frac{q}{\sqrt{b^2-ac}} = \frac{\sqrt{-aR}}{\sqrt{b^2-ac}}$$

et l'on obtient:

$$\frac{1}{i}\log.(ax+b+\sqrt{aR}) = \theta.$$

On peut encore procéder d'une manière différente et par un changement de variable, en partant de l'expression de R, décomposée en facteurs du premier degré :

$$R = a(x-g)(x-h).$$

Supposons $g > h$, nous ferons :

$$x = g\sin^2\varphi + h\cos^2\varphi;$$

ce qui donne :

$$dx = 2(g-h)\sin\varphi\cos\varphi\,d\varphi$$

d'on a ensuite :

$$R = -a(g-h)^2\sin^2\varphi\cos^2\varphi,$$

d'où :

$$\frac{dx}{\sqrt{R}} = \frac{2\,d\varphi}{\sqrt{-a}}$$

et par conséquent :

$$\int\frac{dx}{\sqrt{R}} = \frac{2}{\sqrt{-a}}\,\varphi.$$

Les angles θ et φ que nous avons successivement introduits satisfont aux deux équations :

$$\sin\theta = \frac{\sqrt{-aR}}{\sqrt{b^2-ac}}$$

$$\sin\varphi\cos\varphi = \frac{\sqrt{-aR}}{\sqrt{a^2(g-h)^2}};$$

ayant donc : $a^2(g-h)^2 = 4(b^2-ac)$, on en conclut :

$$2\sin\varphi\cos\varphi = \sin\theta,$$

d'où : $2\varphi = \theta$, comme on devait l'obtenir.

Considérons en particulier l'ellipse rapportée à son centre et à ses axes :

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2},$$

l'expression de l'aire du segment sera :

$$S = \frac{bx\sqrt{a^2-x^2}}{2a} + ab\varphi,$$

l'angle φ dépendant de l'abscisse par la relation :

$$x = a(\sin^2\varphi - \cos^2\varphi)$$

On voit ainsi que φ croissant de zéro à $\frac{\pi}{2}$, x varie de $-a$ à $+a$ et comme le terme algébrique s'évanouit à ces deux limites ; la formule donne pour l'aire de la demi-ellipse :

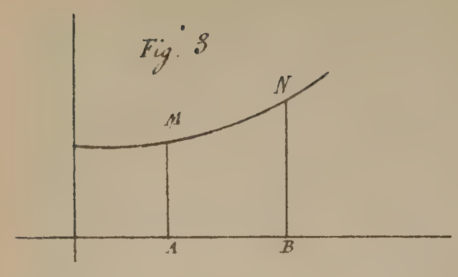
$$S = \frac{\pi ab}{2}$$

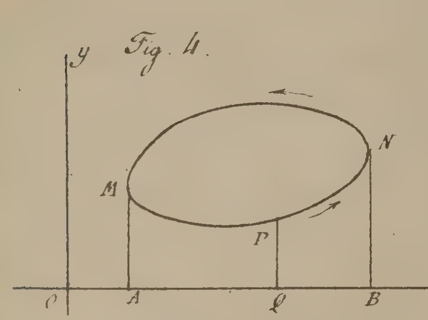
On parvient d'une autre manière à la quadrature de l'ellipse en exprimant les coordonnées de ses points par les formules :

$$x = a\cos t \qquad y = b\sin t.$$

En général, supposons une courbe définie par les équations $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, l'intégrale $\int_\alpha^\beta \psi(t)\varphi'(t)\,dt$ représentera le segment MNAB, sous la condition qu'en faisant croître t de α à β, les expressions de x et y donnent tous les points de l'arc MN, depuis M jusqu'à N.

Considérons maintenant, en conservant la même variable auxiliaire, une courbe





fermée qui soit décrite en entier et une seule fois à partir du point P dans le sens PNM, de manière que l'espace illimité se trouve toujours à droite, t croissant de t_0 à t_1 ; supposons de plus que la courbe ne se coupe point et qu'à une même abscisse correspondent seulement deux ordonnées. Soient M et N les points limites dont les ordonnées sont des tangentes ; considérons successivement les arcs PN, NM, MP et admettons que le premier soit décrit en faisant croître t de t_0 à α, le second de α à β, le troisième de β à t_1.

On a :

$$PQNB = \int_{t_0}^{\alpha} \psi(t)\varphi'(t)\, dt,$$
$$NBMA = \int_{\beta}^{\alpha} \psi(t)\varphi'(t)\, dt,$$
$$MAPQ = \int_{\beta}^{t_1} \psi(t)\varphi'(t)\, dt,$$

Soit donc S l'aire de la courbe fermée ; ces diverses expressions nous donnent :

$$-S = MAPQ + PQNB - NBMA = \int_{t_0}^{\alpha} \psi\varphi' dt - \int_{\beta}^{\alpha} \psi\varphi' dt + \int_{\beta}^{t_1} \psi\varphi' dt,$$

ou :

$$-S = \int_{t_0}^{\alpha} \psi\varphi' dt + \int_{\alpha}^{\beta} \psi\varphi' dt + \int_{\beta}^{t_1} \psi\varphi' dt$$

et finalement :

$$-S = \int_{t_0}^{t_1} \psi\varphi' dt,$$

L'intégrale $\int_{t_0}^{t_1} \psi\varphi' \, dt$, changée de signe, représente donc l'aire comprise dans l'intérieur de la courbe. On verra immédiatement, d'ailleurs qu'on obtient l'aire sans changer le signe, lorsque le contour est décrit de manière que l'espace illimité se trouve à gauche.

Appliquons ce résultat à l'ellipse, en employant les formules :

$$x = a \cos t, \qquad y = b \sin t.$$

Si on fait croître t de 0 à 2π, la courbe se trouve complètement décrite, et une seule fois, l'espace illimité étant toujours à droite de la direction du point décrivant.

En désignant par S l'aire de l'ellipse nous aurons ainsi :

$$S = -\int_0^{2\pi} y \, dx = \int_0^{2\pi} ab \cos^2 t \, dt$$

Appliquons maintenant à l'intégrale $\int \cos^2 t \, dt$ la méthode générale relative à la quantité $\int \cos^m x \sin^n x \, dx$. On transforme les puissances ou produits des puissances du cosinus et du sinus de x en expressions linéaires par rapport aux cosinus et sinus des multiples de l'arc. Ici nous obtenons immédiatement :

$$\int \cos^2 t \, dt = \int \frac{1 + \cos 2t}{2} dt = \frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4} + c$$

d'où

$$S = ab \int_0^{2\pi} \cos^2 t \, dt = \pi ab.$$

La remarque suivante conduit, comme on va voir à un calcul plus simple.

Reprenons la formule : $S = -\int_{t_0}^{t_1} \psi(t)\,\varphi'(t)\,dt$; on a évidemment :

$$\varphi(t)\,\psi(t) = \int [\varphi(t)\,\psi'(t) + \varphi'(t)\,\psi(t)]\,dt\,;$$

et comme les fonctions $\varphi(t)$ et $\psi(t)$ ont la même valeur aux limites α et β, nous pouvons écrire :

$$0 = \int_{t_0}^{t_1} [\varphi(t)\,\psi'(t) + \varphi'(t)\,\psi(t)]\,dt\,;$$

ce qui donne facilement :

$$2\,S = \int_{t_0}^{t_1} [\varphi(t)\,\psi'(t) - \varphi'(t)\,\psi(t)]\,dt\,;$$

Dans le cas de $\varphi(t) = a\cos t$, $\psi(t) = b\sin t$, cette formule conduit immédiatement à l'expression :

$$2\,S = \int^{2\pi} ab(\cos^2 t + \sin^2 t)\,dt = 2\pi ab\,;$$

et si l'on considère une courbe unicursale, de sorte qu'on ait : $x = \frac{B}{A}$, $y = \frac{C}{A}$, A, B, C étant des polynomes entiers en t, on trouvera :

$$2\,S = \int_{t_0}^{t_1} \left[\frac{B(AC' - CA')}{A^3} - \frac{C(AB' - BA')}{A^3}\right]dt = \int_{t_0}^{t_1} \frac{BC' - CB'}{A^2}\,dt$$

La simplification consiste en ce que la fraction rationnelle à intégrer a pour dénominateur A^2, au lieu de A^3, comme on l'avait dans la première formule.

Soit en second lieu, l'hyperbole :

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}\,;$$

nous aurons pour l'aire du segment compté à partir de $x = a$, c'est-à-dire du sommet de la courbe :

$$S = \frac{bx\sqrt{x^2 - a^2}}{2a} - \frac{ab}{2}\log\frac{x + \sqrt{x^2 - a^2}}{a}\,,$$

puis dans le cas de l'hyperbole équilatère, en supposant $b = a$:

$$S = \frac{x\sqrt{x^2 - a^2}}{2} - \frac{a^2}{2}\log\frac{x + \sqrt{x^2 - a^2}}{a}$$

La partie algébrique de cette expression est l'aire du triangle O M P (fig 5) on en conclut que la partie transcendante représente le secteur O M A. Cela étant soit pour plus de simplicité $a = 1$, en désignant ce secteur par u, nous pourrons écrire :

$$2\,u = \log(x + \sqrt{x^2 - 1}) = \log(x + y)$$

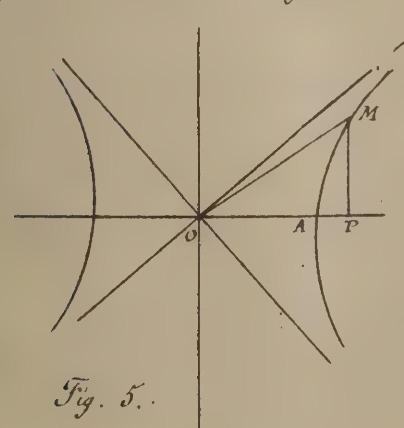


Fig. 5.

On tire de là

et d'après l'équation : $x^2 - y^2 = 1$:

$$\left.\begin{array}{l} x + y = e^{2u} \\ x - y = e^{-2u} \end{array}\right\}$$

Ces formules nous donnent :

$$\left\{\begin{array}{l} x = \dfrac{e^{2u} + e^{-2u}}{2} \\ y = \dfrac{e^{2u} - e^{-2u}}{2} \end{array}\right.$$

x et y s'expriment donc en fonction de e^{2u}, comme $\sin x$ et $\cos x$ s'expriment en fonction de $e^{x\sqrt{-1}}$ Cette correspondance analytique pouvait être prévue en remarquant que l'aire de l'hyperbole devient celle du cercle en introduisant le facteur $\sqrt{-1}$. Aussi

désigne-t-on x et y sous les noms de cosinus hyperbolique et sinus hyperbolique de $2u$. Il n'est pas inutile de s'arrêter un moment aux conséquences géométriques de cette correspondance analytique.

Soient deux secteurs hyperboliques u et u'; nous aurons les équations suivantes;

$$x+y=e^{2u} \qquad x-y=e^{-2u}$$
$$x'+y'=e^{2u'} \qquad x'-y'=e^{-2u'}$$

Cherchons maintenant les coordonnées X, Y d'un point de l'hyperbole tel que le secteur correspondant soit égal à $t+t'$. Cette condition nous donne:

$$X+Y=e^{2(u+u')} \qquad X-Y=e^{-2(u+u')},$$

et l'on en conclut:

$$\begin{cases} X+Y=(x+y)(x'+y') \\ X-Y=(x-y)(x'-y'), \end{cases}$$

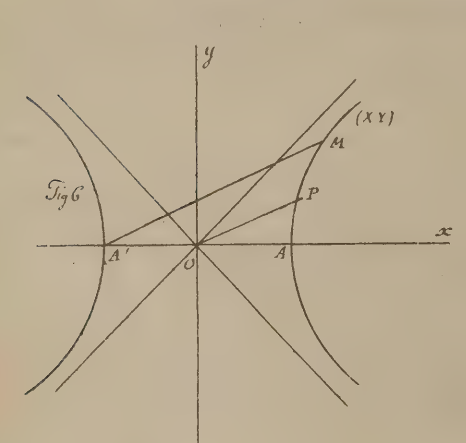
d'où:

$$\begin{cases} X=xx'+yy' \\ Y=xy'+yx', \end{cases}$$

formules analogues à celles qui donnent $\cos(a+b)$ et $\sin(a+b)$.

On a d'ailleurs, l'identité facile à vérifier:

$$Y(x+x')=(y+y')(1+X);$$



elle montre que le point (X, Y) s'obtiendra en coupant l'hyperbole par une droite passant par le second sommet A' et parallèle à la droite OP qui joint le point O au milieu P de la corde MM'.

C'est là une construction toute pareille à celle que l'on peut faire dans le cercle pour résoudre le problème correspondant.

La lemniscate représentée par l'équation du 4e degré.

$$(x^2+y^2)^2=x^2-y^2$$

servira d'application de la formule qui concerne les courbes unicursales. On établit, en effet, que la lemniscate est unicursale en remarquant qu'elle n'a avec les circonférences:

$$x^2+y^2=t(x+y),$$

qu'un seul et unique point variable d'intersection. C'est ce que montre l'équation:

$$t^2(x+y)^2=x^2-y^2,$$

qui donne en supprimant le facteur $x+y$, un faisceau de droites passant par l'origine:

$$t^2(x+y)=x-y.$$

Les coordonnées du point de rencontre avec la circonférence sont représentées par les expressions rationnelles.

$$x=\frac{t+t^3}{1+t^4}, \qquad y=\frac{t-t^3}{1+t^4}$$

Cela posé, considérons au lieu du segment S, le secteur $S-\frac{1}{2}xy=\frac{1}{2}\int(y\,dx-x\,dy)$; en supposant, comme nous l'avons fait plus haut: $x=\frac{B}{A}$, $y=\frac{C}{A}$, on sera ramené à l'intégrale:

$$\frac{1}{2}\int\frac{B'C-BC'}{A^2}\,dt.$$

et nous devons prendre :

$$A = 1+t^4, \qquad B = t+t^3, \qquad C = t-t^3.$$

Or on a :

$$\frac{B}{C} = \frac{1+t^2}{1-t^2}, \qquad \text{puis :} \quad \frac{B'C-BC'}{C^2} = \frac{4t}{(1-t^2)^2},$$

et par conséquent

$$-\frac{1}{2}\int \frac{B'C-BC'}{A^2}\,dt = \int \frac{2t^3\,dt}{(1+t^4)^2} = C - \frac{1}{2(1+t^4)},$$

On peut dans cette expression remplacer la variable t par les coordonnées x et y, en employant la relation $t^2 = \frac{x-y}{x+y}$, nous obtenons ainsi :

$$S - \frac{1}{2}xy = C - \frac{(x+y)^2}{4(x^2+y^2)}$$

Nous envisagerons, en dernier lieu, la cycloïde définie par les équations :

$$\begin{cases} x = a\,(t - \sin t) \\ y = a\,(1-\cos t) \end{cases}$$

a étant le rayon du cercle générateur.

La portion de la cycloïde comprise entre deux points consécutifs de rencontre avec Ox a une aire exprimée par l'intégrale :

$$\int_0^{2\pi} a^2 (1-\cos t)^2\,dt.$$

Or on a : $$\int (1-\cos t)^2\,dt = \int dt - 2\int \cos t\,dt + \int \cos^2 t\,dt;$$

et en appliquant au dernier terme la méthode indiquée plus haut, nous parvenons à l'expression

$$t - 2\sin t + \frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4} + C$$

ou :

$$\frac{3}{2}t - 2\sin t + \frac{\sin 2t}{4} + C.$$

L'aire totale de la cycloïde est donc $3\pi a^2$, c'est, comme Galilée l'a découvert le premier, trois fois l'aire du cercle générateur.

La quadrature des courbes du troisième degré se ramène à la rectification des coniques, c'est-à-dire, pour plus de précision, aux intégrales que l'on trouve pour les arcs d'ellipse, et qui, en raison de cette circonstance, ont été nommées intégrales elliptiques. Il est facile de le vérifier ; prenons pour origine un point quelconque de la courbe, et menons par ce point une sécante $y = tx$. Elle coupe la courbe en deux points distincts de l'origine, dont les abscisses sont données par l'équation : $Ax^2 + Bx + C = 0$, A étant du 3e degré en t, B du 2e et C du 1er. Donc $B^2 - 4AC$ est du 4e degré.

Par suite, $\int y\,dx$ s'exprime rationnellement en fonction de t et du radical $\sqrt{B^2-4AC}$ portant sur un polynôme du quatrième degré. Nous verrons bientôt que ce sont des intégrales de cette nature dont dépend aussi la rectification des courbes du second degré.

IIe. Leçon.

Les cubiques planes se partagent en deux classes, et cette distinction est également importante au point de vue géométrique et au point de vue analytique.

Quand une cubique $f(x, y) = 0$ a un point double, c'est-à-dire quand les trois équations $f(x, y) = 0$, $f'_x(x, y) = 0$, $f'_y(x, y) = 0$, ont une solution commune, en prenant ce point pour origine des coordonnées, l'équation de la courbe rapportée aux nouveaux axes ne contiendra plus que des termes du troisième et du second degré. Donc en posant $y = tx$, on pourra exprimer les coordonnées x et y d'un point quelconque de la courbe rationnellement en fonction de la nouvelle variable t.

Dans le cas général, nous avons vu que les coordonnées d'un point quelconque d'une cubique s'expriment rationnellement en fonction d'une variable t et d'un radical carré portant sur un polynôme du quatrième degré $R(t)$. Mais comment arrive-t-il dans le cas d'un point double que les coordonnées deviennent exprimables en fonction rationnelle d'une nouvelle variable ? Voici succinctement la marche à suivre pour traiter la question.

Nous avons vu que a et b étant l'abscisse et l'ordonnée d'un point quelconque de la courbe, on pose : $y - b = (x - a)t$. Il vient alors, pour déterminer x, l'équation :

$$Ax^2 + Bx + C = 0,$$

et nous avons représenté par $R(t)$ la quantité placée sous le radical, $B^2 - 4AC$.

On devrait former le discriminant du polynôme $R(t)$, qui contient a comme paramètre arbitraire et calculer à cet effet les invariants I et J du second et du troisième ordre pour en conclure ce discriminant $I^3 - 27J^2$. Ensuite, il faudrait mettre en évidence, comme facteur, le descriminant de la forme cubique $f(x, y)$; c'est-à-dire l'expression $S^3 - T^2$, S et T étant les invariants de cette forme. On démontrerait ainsi par un calcul direct que, si la cubique a un point double, le polynôme $R(t)$ admet une racine double, de sorte que le radical ne porte plus que sur un polynôme du 2e degré. Nous établirons ce résultat par une méthode plus simple de la manière suivante. La courbe étant unicursale, nous poserons :

$$x = \frac{G}{K} \qquad y = \frac{H}{K},$$

G, H, K étant des polynômes entiers du troisième degré par rapport à une variable u.

Cela étant, d'après la méthode générale, je ferai :

$$y - b = (x - a)t,$$

et pour obtenir ensuite x et y en fonction de t, nous chercherons u en fonction de cette variable, en employant la relation :

$$H - bK = t(G - aK).$$

Cette équation est du 3e degré en u ; mais si nous désignons par u_0 la valeur de u relative au point (a, b) de la courbe, il est clair qu'elle admet la racine u_0 ; supprimant donc le facteur $u - u_0$, il reste une équation du second degré :

$$Lu^2 + Mu + N = 0,$$

où L, M, N sont du premier degré en t.

Ceci nous montre que la variable u s'exprime rationnellement en fonction de t et du radical $\sqrt{M^2-4LN}$ qui porte sur un polynôme du second degré en t seulement. Il en est donc de même pour les coordonnées x et y, d'où résulte que le radical $\sqrt{R(t)}$, considéré plus haut, se réduit du quatrième degré au second. Cette circonstance se produisant comme conséquence d'une seule et unique condition, il faut que le polynôme $R(t)$ ait une racine double, c'est-à-dire que son discriminant soit nul.

Pour avoir ensuite les coordonnées x et y en fonction rationnelle d'une seule variable auxiliaire u, il suffira de rendre rationnel le radical portant sur un trinôme du second degré, ce qu'on obtient par une substitution de la forme $t = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$.

En général, d'ailleurs, lorsqu'on a la relation $y = \sqrt{ax^2+bx+c}$ et qu'on veut exprimer rationnellement x et y en fonction d'une variable auxiliaire, on n'a plus recours à l'analyse ingénieuse de Diophante et employée pendant si longtemps dans le Calcul Intégral. On se place au point de vue géométrique, et on arrive ainsi à des méthodes nouvelles et plus fécondes. On remarque que l'équation $y = \sqrt{ax^2+bx+c}$ représente une conique et on détermine individuellement tous ses points par les intersections de sécantes issues d'un point fixe.

Revenons aux coordonnées x et y des points d'une cubique quelconque qui peuvent s'exprimer rationnellement en fonction de t et $\sqrt{R(t)}$, $R(t)$ désignant un polynôme du quatrième degré en t.

Si on fait la transformation $t = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$, on voit que l'on aura toujours x et y exprimées rationnellement en fonction de la nouvelle variable z et de la racine carrée d'un polynôme du 4 degré en z. C'est là l'origine d'une question importante.

Désignons par x la variable indépendante et considérons le radical $\sqrt{R(x)}$, $R(x)$ étant un polynôme du quatrième degré. Dans une fonction rationnelle de x et $\sqrt{R(x)}$ nous pouvons introduire trois constantes absolument arbitraires par la transformation : $x = \frac{\alpha t + \beta}{\gamma t + \delta}$

On en profite pour simplifier les fonctions rationnelles de x et de $\sqrt{R(x)}$; on entend par là les ramener à une forme particulière qu'on nomme canonique, c'est-à-dire les exprimer en fonction rationnelle de t et d'un radical tel que $\sqrt{at^4+bt^2+c}$. Cette réduction à la forme canonique est d'une haute importance dans la rectification des courbes du second degré et dans la théorie des fonctions elliptiques.

Soit :
$$R(x) = A(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)$$
et posons :
$$x = \frac{p+qt}{1+t}$$

Nous nous plaçons avec Legendre au point de vue des quantités réelles, c'est-à-dire que nous supposons les coefficients de $R(x)$ essentiellement réels, en nous proposant d'obtenir pour p et q des valeurs réelles.

Aux quatre racines de $R(x)$ correspondent quatre racines du polynôme transformé;

mais ces quatre quantités doivent être deux à deux égales à des signes contraires, en remarquant que $t = \frac{x-p}{q-x}$ nous aurons les conditions :

$$\frac{a-p}{q-a} = -\frac{b-p}{q-b} \;;\; \frac{c-p}{q-c} = -\frac{d-p}{q-d} \;;$$

ou bien :

$$\frac{a-p}{q-a} + \frac{b-p}{q-b} = 0, \frac{c-p}{q-c} + \frac{d-p}{q-d} = 0.$$

Ajoutons l'unité à chacune des fractions qui y entrent, elles prendront cette nouvelle forme :

$$(q-p)\left(\frac{1}{q-a} + \frac{1}{q-d}\right) = 2$$

$$(q-p)\left(\frac{1}{q-c} + \frac{1}{q-d}\right) = 2,$$

et l'on en conclut les relations suivantes :

$$\frac{1}{q-a} + \frac{1}{q-b} = \frac{1}{q-c} + \frac{1}{q-d} = \frac{2}{q-p}$$

Cela étant, supposons d'abord les quantités a, b, c, d réelles et rangées par ordre de grandeur ; la forme même de l'équation

$$\frac{1}{q-a} + \frac{1}{q-b} - \frac{1}{q-c} - \frac{1}{q-d} = 0,$$

qui se réduit au second degré, prouve l'existence d'une racine comprise entre a et b, et d'une autre entre c et d. On voit pareillement que dans le cas où a et b sont réels, tandis que c et d sont imaginaires conjuguées, on aura encore une racine réelle comprise entre a et b, d'où résulte que la seconde racine de l'équation est nécessairement réelle. Enfin supposons que a et b soient, ainsi que c et d, imaginaires conjuguées, et faisons pour un moment :

$$f(q) = \frac{1}{q-a} + \frac{1}{q-b} - \frac{1}{q-c} - \frac{1}{q-d} \;;$$

pour q très grand on a :

$$f(q) = \frac{a+b-c-d}{q^2},$$

on trouve ensuite :

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) = -\frac{a+b-c-d}{\left(\frac{a+b}{2}-c\right)\left(\frac{a+b}{2}-d\right)}$$

$$f\left(\frac{c+d}{2}\right) = -\frac{a+b-c-d}{\left(\frac{c+d}{2}-a\right)\left(\frac{c+d}{2}-b\right)}.$$

Les dénominateurs de ces fractions étant positifs, comme produits de quantités imaginaires conjuguées, les résultats sont de signes contraires à celui qu'on a obtenu en supposant q infini. On montre ainsi l'existence de deux racines qui sont en dehors de l'intervalle compris entre $\frac{a+b}{2}$ et $\frac{c+d}{2}$.

Il est donc établi que la réduction à la forme canonique peut toujours s'effectuer à l'aide d'une substitution réelle.

Nous avons écarté momentanément le cas où $a+b-c-d=0$, on arrive alors au résultat cherché en posant simplement

$$x = t + \frac{a+b}{2}.$$

Évaluation des aires en coordonnées polaires.

L'aire d'un secteur de courbe compris entre les rayons répondant aux angles ω_0 et ω_1 est donnée par la formule

$$U = \frac{1}{2}\int_{\omega_0}^{\omega_1} \rho^2 d\omega.$$

Nous l'appliquerons en considérant l'ellipse

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = 1,$$

dont l'équation est en coordonnées polaires:

$$\rho^2 = \frac{1}{A\cos^2\omega + 2B\sin\omega\cos\omega + C\sin^2\omega};$$

ce qui conduit à l'intégrale:

$$\int \frac{d\omega}{A\cos^2\omega + 2B\sin\omega\cos\omega + C\sin^2\omega}.$$

Nous en ferons le calcul en appliquant la méthode générale pour rendre rationnelle une différentielle de la forme $f(\sin\omega, \cos\omega)\,d\omega$; pour cela on pose, $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\omega = t$; ce qui donne effectivement:

$$\sin\omega = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos\omega = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad d\omega = \frac{2\,dt}{1+t^2}$$

Mais ce procédé très simple à indiquer est souvent pénible à appliquer, et il faut, suivant les cas, chercher une marche plus commode.

Ainsi, on peut rendre rationnelle la différentielle proposée par la substitution $\operatorname{tg}\omega = t$, toutes les fois que la fonction $f(\sin\omega, \cos\omega)$, que l'on suppose rationnelle en $\sin\omega$ et $\cos\omega$, ne change pas quand on remplace ω par $\omega+\pi$. Nous avons en effet:

$$\sin\omega = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}, \qquad \cos\omega = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$$

et par suite $f(\sin\omega, \cos\omega)$ prend la forme:

$$A + \frac{B}{\sqrt{1+t^2}},$$

A et B étant des fonctions rationnelles de t.

Remplaçons ω par $\omega+\pi$, t conserve la même valeur, tandis que $\sin\omega$, $\cos\omega$ et par conséquent $\sqrt{1+t^2}$ changent de signe. On a donc:

$$f[\sin(\omega+\pi), \cos(\omega+\pi)] = A - \frac{-B}{\sqrt{1+t^2}};$$

et la condition:

$$f(\sin\omega, \cos\omega) = f(-\sin\omega, -\cos\omega),$$

donnant $B = 0$, on obtient $f(\sin\omega, \cos\omega) = A$, c'est-à-dire, une fonction rationnelle de t.

Dans le cas présent, par exemple; en faisant $\operatorname{tg}\omega = t$, on a pour transformée l'intégrale:

$$\int \frac{dt}{A + 2Bt + Ct^2}$$

Supposons maintenant qu'il s'agisse de calculer l'aire totale U de l'ellipse; elle a pour expression:

$$U = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \frac{d\omega}{A\cos^2\omega + 2B\sin\omega\cos\omega + C\sin^2\omega},$$

et puisque la différentielle ne change pas quand on remplace ω par $\omega+\pi$, on peut prendre pour limite : $\omega=0$, $\omega=\pi$, en doublant l'intégrale, ce qui donne :

$$U=\int_0^{\pi}\frac{d\omega}{A\cos^2\omega+2B\sin\omega\cos\omega+C\sin^2\omega}$$

Une circonstance à laquelle je m'arrête un moment est à remarquer : on a posé $\operatorname{tg}\omega=t$, de sorte qu'aux limites $\omega=0$ et $\omega=\pi$, on trouve la même valeur $t=0$, et il semble résulter de là que l'intégrale est nulle. Il est facile de lever ce paradoxe en remarquant que quand ω passe par la valeur $\frac{\pi}{2}$, t passe de $+\infty$ à $-\infty$, c'est-à-dire éprouve une discontinuité. Il faut donc partager l'intégrale en deux autres et écrire :

$$\int_0^{\pi}f(\omega)\,d\omega=\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(\omega)\,d\omega+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}f(\omega)\,d\omega\ ;$$

or, en remarquant que la fonction $f(\omega)$ ne change pas quand on remplace ω par $\omega+\pi$, on a :

$$\int_0^{\pi}f(\omega)\,d\omega=\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(\omega)\,d\omega+\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}f(\omega)\,d\omega=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}f(\omega)\,d\omega$$

$$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}\frac{d\omega}{A\cos^2\omega+B\sin\omega\cos\omega+C\sin^2\omega}.$$

Cette fois la variable t n'éprouve plus de discontinuité lorsque ω croît de $-\frac{\pi}{2}$ à $+\frac{\pi}{2}$, et nous obtenons :

$$U=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dt}{A+2Bt+Ct^2}$$

Si la courbe est une ellipse, on a : $AC-B^2>0$ et par suite en appliquant la méthode ordinaire on trouve :

$$U=\frac{\pi}{\sqrt{AC-B^2}}$$

Cette expression de l'aire de l'ellipse est remarquable en ce qu'elle permet d'exprimer au moyen d'une intégrale définie, où entrent rationnellement A, B, C, le radical $\frac{1}{\sqrt{AC-B^2}}$: On a en effet :

$$\frac{\pi}{\sqrt{AC-B^2}}=\int_0^{2\pi}\frac{d\omega}{A\cos^2\omega+2B\sin\omega\cos\omega+C\sin^2\omega}$$

Il existe d'autres exemples du même fait, et nous citerons en particulier la formule :

$$\frac{\pi}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=\int_0^{2\pi}\frac{d\omega}{A+iB\cos\omega+iC\sin\omega},$$

où $i=\sqrt{-1}$. Cette égalité a été le point de départ d'un mémoire important de Jacobi, dans lequel le grand géomètre obtient par une analyse d'une extrême élégance les propriétés des polynômes de Legendre et des fonctions de Laplace.

Le paradoxe que nous avons rencontré tout à l'heure se présente souvent dans des

circonstances moins simples.

Faisons dans l'intégrale $\int_a^b F(x)\,dx$, la substitution $y = f(x)$, en supposant que y s'annule aux limites $x = a$, $x = b$. La transformée au premier abord semble être nulle ; il n'en est rien cependant, même si l'on suppose que y reste continu quand x varie de a à b.

Considérons en effet la courbe $y = f(x)$; qui sera représentée par A R B, où l'on a pris OA $= a$ et OB $= b$. On voit que l'ordonnée étant la variable indépendante, à chaque valeur de y correspondent deux valeurs de x et nous supposons qu'il n'y en ait pas plus de deux.

Fig. 7

La figure suffit alors pour lever toute difficulté, R S étant l'ordonnée maximum, on devra calculer l'intégrale 1° entre les limites $y = 0$, $y = $ RS, en employant pour x la plus petite des deux valeurs qui répondent à une même valeur de y ; 2° entre les limites $y = $ R S, $y = 0$, en prenant pour x la plus grande de ces deux valeurs, et l'on fera la somme des deux intégrales trouvées. Eclaircissons ceci par un exemple.

On est conduit dans l'étude des polynômes de Legendre à la considération de l'intégrale définie :

$$\int_{-1}^{+1} \frac{(1-x^2)^m\,dx}{(a-x)^{m+1}}$$

où a est supérieur à 1 en valeur absolue. Faisons la substitution :

$$\frac{1-x^2}{a-x} = 2y\ ;$$

On en tire les valeurs :

$$\begin{cases} x = y - \sqrt{y^2 - 2ay + 1} \\ x = y + \sqrt{y^2 - 2ay + 1}\ , \end{cases}$$

et le maximum de y s'obtient lorsqu'elles deviennent égales, c'est-à-dire en posant :

$$y^2 - 2ay + 1 = 0$$

C'est donc la quantité :

$$a - \sqrt{a^2 - 1}\ ,$$

puisque la valeur de x correspondante doit être comprise entre -1 et $+1$, et qu'on suppose $a > 1$.

Cela étant nous employerons les relations :

$$\frac{dx}{a-x} = \frac{dy}{y-x}\ ,$$

$$\left(\frac{1-x^2}{a-x}\right)^m = (2y)^m.$$

et en prenant d'abord :

$$y - x = \sqrt{y^2 - 2ay + 1}$$

on en conclut l'intégrale :

$$\int_0^{a-\sqrt{a^2-1}} \frac{(2y)^m\,dy}{\sqrt{y^2 - 2ay + 1}}$$

Nous devons ensuite employer la seconde valeur de x, et supposer par conséquent

$$y - x = -\sqrt{y^2 - 2ay + 1}\ ,$$

d'où cette autre intégrale:

$$-\int_{a-\sqrt{a^2-1}}^{0} \frac{(2y)^m dy}{\sqrt{y^2-2ay+1}},$$

qui revient à la première, si l'on intervertit les limites, en changeant le signe.

On parvient donc au résultat suivant:

$$\int_{-1}^{+1} \frac{(1-x^2)^m dx}{(a-x)^{m+1}} = 2^{m+1} \int_0^{a-\sqrt{a^2-1}} \frac{y^m dy}{\sqrt{y^2-2ay+1}},$$

dont on tire d'intéressantes conséquences.

IIIe Leçon.

Si l'on représente par S l'arc d'une courbe dont les coordonnées sont x et y, on a la formule:

$$S = \int \sqrt{dx^2+dy^2}$$

que nous appliquerons, en premier lieu, aux courbes du second degré, en partant de l'expression générale:

$$y = \alpha x + \beta + \sqrt{ax^2+2bx+c}$$

précédemment employée

En faisant encore: $R = ax^2+2bx+c$, on obtient ainsi:

$$S = \int \left[\alpha^2+a+1+\frac{b^2-ac}{R}+\frac{2\alpha(ax+b)}{\sqrt{R}}\right]^{\frac{1}{2}} dx,$$

expression compliquée qu'on ramènera à une autre plus simple au moyen d'une substitution rendant le radical $\sqrt{R}$ rationnel par rapport à une nouvelle variable. Cette forme plus simple s'offre immédiatement lorsqu'on a: $\alpha = 0$. il vient alors:

$$S = \int \sqrt{\frac{R(a+1)+b^2-ac}{R}}\, dx = \int \frac{R(a+1)+b^2-ac}{\sqrt{R^2(a+1)+R(b^2-ac)}} dx$$

Le polynôme placé sous le radical étant du quatrième degré on voit que ce sont des intégrales de même nature qui donnent les arcs des sections coniques et les aires des courbes du 3e ordre. Remarquons toutefois le cas particulier du cercle et celui de la parabole, qui correspondent aux valeurs $a=-1$ et $a=0$. Le premier conduit à la quantité:

$$S = \int \frac{b^2+c}{\sqrt{(-x^2+2bx+c)(b^2+c)}} dx = \int \frac{dx}{\sqrt{1-\left(\frac{x-b}{\sqrt{b^2+c}}\right)^2}}$$

d'où:

$$S = \sqrt{b^2+c}\ \text{arc sin}\ \frac{x-b}{\sqrt{b^2+c}}.$$

Dans le second, l'intégrale :

$$S = \int \sqrt{1 + \frac{b^2}{2bx + c}}\, dx$$

s'obtient aisément en prenant l'ordonnée de la parabole $y = \sqrt{2bx+c}$ pour variable indépendante. On trouve ainsi :

$$S = \frac{1}{b} \int \sqrt{y^2 + b^2}\, dy\,,$$

et par un calcul facile :

$$S = \frac{y\sqrt{y^2+b^2}}{2b} + \frac{1}{2b} \log \frac{y + \sqrt{y^2+b^2}}{b}$$

Venons maintenant à la rectification de l'ellipse ; en mettant sous la forme :

$$y = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}\,,$$

l'equation de la courbe, l'arc est donné par l'intégrale :

$$S = \frac{1}{a} \int \frac{a^4 - c^2x^2}{\sqrt{(a^2-x^2)(a^4 - c^2x^2)}}\, dx\,,$$

où $c^2 = a^2 - b^2$. C'est pour ce motif qu'elle a reçu dans les premiers travaux de Legendre la dénomination d'intégrale elliptique, attribuée depuis à toutes les expressions telles que :

$$\int f(x, \sqrt{R}\,)\, dx\,,$$

ou $f(x, \sqrt{R})$ est en général une fonction rationnelle de la variable et de la racine carrée d'un polynôme R du quatrième degré.

Faisons dans l'expression de l'arc d'ellipse, $x = a \sin\varphi$, $k = \frac{c}{a}$, et prenons pour origine l'extrémité du petit axe, on aura ainsi :

$$S = a \int_0^\varphi \sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi}\, d\varphi\,;$$

cela étant Legendre pose :

$$E(k, \varphi) = \int_0^\varphi \sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}\, d\varphi\,,$$

et nomme l'angle φ l'amplitude de l'intégrale, la constante k, le module, $k' = \sqrt{1-k^2}$ le module complémentaire, et désigne, sous le nom de fonction complète l'intégrale :

$$E^1(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi}\, d\varphi$$

par laquelle s'obtient le quart de l'ellipse. Legendre donne encore le nom de fonctions de première et seconde espèce, aux intégrales.

$$\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}\,, \int_0^\varphi \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\, d\varphi\,,$$

en représentant la première par $F(k, \varphi)$, et désignant sous le nom de fonction complète la valeur qui correspond à l'amplitude $\varphi = \frac{\pi}{2}$, de sorte qu'on a :

$$F^1(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}$$

Bientôt nous présenterons sous un point de vue plus général, ces notions dont nous donnons en ce moment l'origine ; nous allons immédiatement en faire usage en faisant voir

comment l'expression de l'arc d'hyperbole se ramène aux fonctions de première et seconde espèce.

La formule $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$ donne d'abord, si l'on part de l'équation $y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$, pour l'arc d'hyperbole que Legendre désigne par Υ l'expression :

$$\Upsilon = \frac{1}{a}\int \frac{(a^2+b^2)x^2 - a^4}{\sqrt{(x^2-a^2)\left[(a^2+b^2)x^2-a^4\right]}}$$

de forme semblable à celle de l'arc d'ellipse. Mais il faut observer que l'abscisse n'est plus comprise entre $-a$ et $+a$; elle doit varier maintenant dans un autre intervalle et croître indéfiniment à partir de $x = a$, ce qui conduit à poser $x = \frac{a}{\xi}$. Soit pour abréger $c^2 = a^2 + b^2$, la transformée relative à cette nouvelle variable qui reste comprise entre -1 et $+1$ est :

$$\Upsilon = -a\int \frac{c^2 - a^2\xi^2}{\xi^2\sqrt{(1-\xi^2)(c^2 - a^2\xi^2)}}\,d\xi$$

d'où l'on conclut :

$$\Upsilon = \frac{a\sqrt{(1-\xi^2)(c^2-a^2\xi^2)}}{\xi} + a^3\int \frac{1-\xi^2}{\sqrt{(1-\xi^2)(c^2-a^2\xi^2)}}\,d\xi$$

Me bornant à indiquer ce résultat qu'on vérifiera par la différentiation, je vais développer les calculs de la réduction aux intégrales de première et seconde espèce, en suivant une méthode analogue à celle de Legendre. Je remarque d'abord qu'on a, si l'on prend l'ordonnée pour variable :

$$\Upsilon = \frac{1}{b}\int \sqrt{\frac{c^2y^2 + b^4}{y^2 + b^2}}\,dy,$$

ce qui conduit à poser

$$cy = b^2 \operatorname{tang}\varphi, \qquad \text{ou} \quad y = b \operatorname{tang}\theta.$$

Enneper a donné cette construction élégante de l'angle φ.

Soit (fig. 8) P un point de l'hyperbole $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, et PT la tangente à la courbe en ce point. Considérons le cercle $x^2 + y^2 = a^2$ qui a son centre à l'origine O des coordonnées. Soit I son point d'intersection avec la tangente, en le joignant au centre, l'angle OIT sera l'angle φ (Elliptischen Functionen Theorie und Geschichte, p. 446*)

Fig. 8

Les transformées relatives aux variables φ et θ sont :

$$\Upsilon = \int_0^{\varphi} \frac{b^2\,d\varphi}{\cos^2\varphi\sqrt{b^2\sin^2\varphi + c^2\cos^2\varphi}}$$

$$\Upsilon = \int_0^{\theta} \frac{\sqrt{c^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta}}{\cos^2\theta}\,d\theta;$$

cela étant, on opère de la manière suivante :

Partons d'abord, en considérant la première, de cette identité :

---

* La formule (20) de la page 467 est inexacte.

$$D_\varphi\left[\operatorname{tg}\varphi\sqrt{b^2\sin^2\varphi+c^2\cos^2\varphi}\right]=\frac{\sqrt{b^2\sin^2\varphi+c^2\cos^2\varphi}}{\cos^2\varphi}+\frac{(b^2-c^2)\sin^2\varphi}{\sqrt{b^2\sin^2\varphi+c^2\cos^2\varphi}},$$

ou encore, par une transformation facile :

$$D_\varphi\left[\operatorname{tg}\varphi\sqrt{b^2\sin^2\varphi+c^2\cos^2\varphi}\right]=\frac{b^2}{\cos^2\varphi\sqrt{b^2\sin^2\varphi+c^2\cos^2\varphi}}+\frac{b^2\sin^2\varphi+c^2\cos^2\varphi-b^2}{\sqrt{b^2\sin^2\varphi+c^2\cos^2\varphi}};$$

ce qui donne, en intégrant :

$$\operatorname{tg}\varphi\sqrt{b^2\sin^2\varphi+c^2\cos^2\varphi}=\Upsilon+\int_0^\varphi\sqrt{b^2\sin^2\varphi+c^2\cos^2\varphi}\,d\varphi-\int_0^\varphi\frac{b^2\,d\varphi}{\sqrt{b^2\sin^2\varphi+c^2\cos^2\varphi}}$$

On reconnaît maintenant dans la première intégrale du second membre l'arc de l'ellipse représentée par les équations : $x=b\cos\varphi$, $y=c\sin\varphi$, et dans la seconde, une fonction de première espèce.

Je considère ensuite la relation analogue :

$$D_\theta\left[\operatorname{tg}\theta\sqrt{b^2\cos^2\theta+c^2\sin^2\theta}\right]=\frac{\sqrt{b^2\cos^2\theta+c^2\sin^2\theta}}{\cos^2\theta}+\frac{(c^2-b^2)\sin^2\theta}{\sqrt{c^2\sin^2\theta+b^2\cos^2\theta}}$$

$$=\frac{\sqrt{c^2\sin^2\theta+b^2\cos^2\theta}}{\cos^2\theta}+\frac{c^2\sin^2\theta+b^2\cos^2\theta-b^2}{\sqrt{c^2\sin^2\theta+b^2\cos^2\theta}},$$

d'où résulte cette seconde formule :

$$\operatorname{tang}\theta\sqrt{b^2\cos^2\theta+c^2\sin^2\theta}=\Upsilon+\int_0^\theta\sqrt{c^2\sin^2\theta+b^2\cos^2\theta}\,d\theta-b^2\int_0^\theta\frac{d\theta}{\sqrt{c^2\sin^2\theta+b^2\cos^2\theta}},$$

et l'on voit qu'il suffirait de changer θ en $\frac{\pi}{2}-\theta$ pour avoir dans le second membre, les mêmes intégrales qui se sont présentées avec la variable φ.

Une remarque se présente comme conséquence de ces deux expressions de l'arc de l'Hyperbole. Ayant posé successivement : $cy=b^2\operatorname{tang}\varphi$, $y=b\operatorname{tang}\theta$, les angles φ et θ sont liés par la relation : $b\operatorname{tang}\varphi=c\operatorname{tang}\theta$ ou bien : $b\cos\theta\sin\varphi=c\sin\theta\cos\varphi$. On en tire, en différentiant.

$$d\theta\,(c\cos\theta\cos\varphi+b\sin\theta\sin\varphi)=d\varphi\,(b\cos\theta\cos\varphi+c\sin\theta\sin\varphi),$$

et les expressions suivantes :

$$\cos\theta=\frac{c\cos\varphi}{\sqrt{b^2\sin^2\varphi+c^2\cos^2\varphi}},\qquad \sin\theta=\frac{b\sin\varphi}{\sqrt{b^2\sin^2\varphi+c^2\cos^2\varphi}}$$

donnant :

$$c\cos\theta\cos\varphi+b\sin\theta\sin\varphi=\sqrt{b^2\sin^2\varphi+c^2\cos^2\varphi},$$

puis si l'on permute, comme il est permis, b et c, θ et φ :

$$b\cos\theta\cos\varphi+c\sin\theta\sin\varphi=\sqrt{c^2\sin^2\theta+b^2\cos^2\theta}$$

nous parvenons à l'équation.

$$d\theta\sqrt{b^2\sin^2\varphi+c^2\cos^2\varphi}=d\varphi\sqrt{c^2\sin^2\theta+b^2\cos^2\theta},$$

ou plutôt :

$$\frac{d\theta}{\sqrt{c^2\sin^2\theta+b^2\cos^2\theta}}=\frac{d\varphi}{\sqrt{b^2\sin^2\varphi+c^2\cos^2\varphi}}$$

On a donc puisque θ et φ s'évanouissent simultanément :

$$\int_0^\theta\frac{d\theta}{\sqrt{c^2\sin^2\theta+b^2\cos^2\theta}}=\int_0^\varphi\frac{d\varphi}{\sqrt{b^2\sin^2\varphi+c^2\cos^2\varphi}};$$

il en résulte si l'on égale les deux expressions de Υ, l'équation suivante :

$$\tang\theta\sqrt{c^2\sin^2\theta+b^2\cos^2\theta}-\tang\varphi\sqrt{b^2\sin^2\varphi+c^2\cos^2\varphi}=\int_0^\theta\sqrt{c^2\sin^2\theta+b^2\cos^2\theta}\,d\theta-\int_0^\varphi\sqrt{b^2\sin^2\varphi+c^2\cos^2\varphi}\,d\varphi.$$

Cela étant, considérons l'ellipse définie en posant :

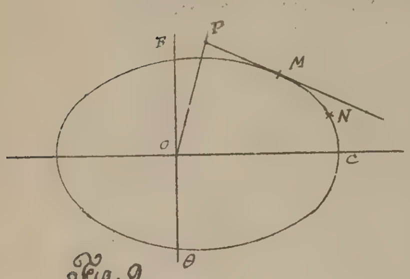


Fig. 9

$$x = c\cos\xi,\qquad y = b\sin\xi\,;$$

Soient M et N deux points de la courbe donnés par les valeurs $\xi=\theta$ et $\xi=\frac{\pi}{2}-\varphi$.

Les arcs BM et CN seront les intégrales :

$$\int_0^\theta\sqrt{c^2\sin^2\theta+b^2\cos^2\theta}\,d\theta \quad \text{et} \quad \int_0^\varphi\sqrt{b^2\sin^2\varphi+c^2\cos^2\varphi}\,d\varphi$$

de sorte que la relation obtenue devient :

$$BM-CN=\tang\theta\sqrt{c^2\sin^2\theta+b^2\cos^2\theta}-\tang\varphi\sqrt{b^2\sin^2\varphi+c^2\cos^2\varphi}$$

puis par une transformation facile du second membre :

$$BM-CN=\frac{(b^2-c^2)\sin\varphi\cos\varphi}{\sqrt{b^2\sin^2\varphi+c^2\cos^2\varphi}}.$$

On voit aisément qu'en menant la tangente en M à l'ellipse, et projetant le centre sur cette tangente en P, la valeur absolue de ce second membre est le segment MP.

Ce résultat a été découvert par l'illustre géomètre Italien Fagnano di Fagnani [1], dont le nom doit être cité avec admiration comme ayant ouvert le premier la voie à la théorie des fonctions elliptiques. Mais voici des théorèmes plus généraux qui mettront en évidence ce qu'il y a d'entièrement nouveau et de caractéristique dans la nature des arcs d'ellipse.

Le premier a été découvert par Mgr Graves, évêque anglican de Limerick, les suivants sont dus à M. Charles.

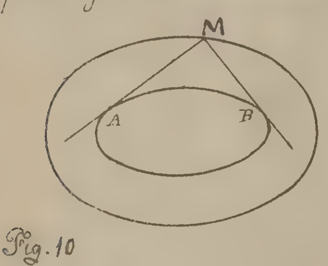
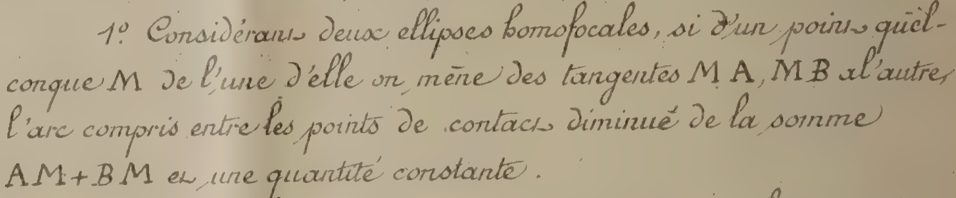


Fig. 10


1° Considérant deux ellipses homofocales, si d'un point quelconque M de l'une d'elle on mène des tangentes MA, MB à l'autre, l'arc compris entre les points de contact diminué de la somme AM+BM est une quantité constante.

2° Faisons la même construction en supposant le point M sur une hyperbole homofocale à l'ellipse, qui la rencontre en N ; alors la différence des arcs NA et NB sera égale à la différence des tangentes MA et MB.

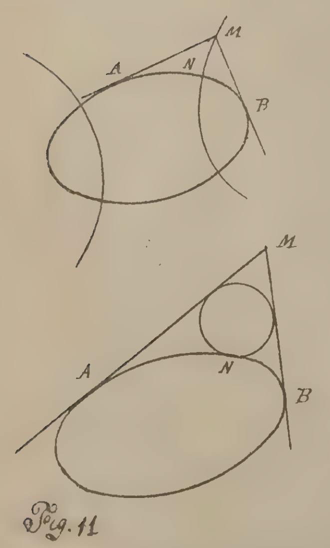


Fig. 11

3° Soient enfin deux tangentes MA et MB, menées à l'ellipse par un point quelconque ; si l'on construit un cercle tangent aux deux droites et à la courbe en N, la différence des arcs NA et NB sera encore égale à MA − MB.

Voici la démonstration du second théorème d'après M. Charles

Considérons sur l'ellipse deux tangentes infiniment voisines en A et A' ; soient M et M' les points où elles coupent l'hyperbole et R leur point de rencontre.

(1) Fagnano. Produzioni matematiche, 1750.

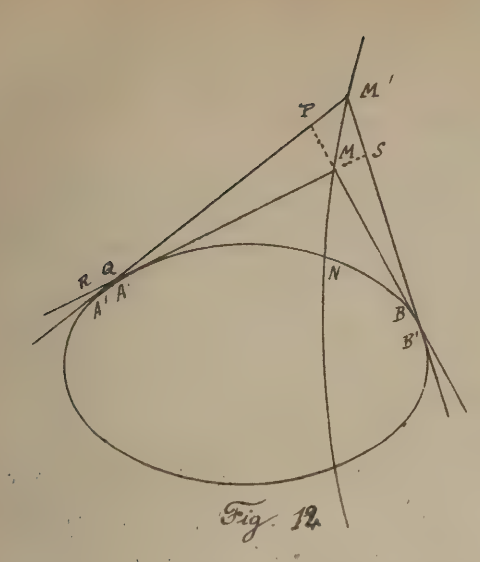


Fig. 12.

Nous observons qu'en projetant sur $A'M'$ les points M et A en P et Q, on a, aux infiniment petits près du second ordre : $RQ = RA$ et $QP = AM$.

La première relation montre d'abord que la corde de l'arc AA', et par conséquent cet arc lui-même est encore égal aux infiniments petits près du second ordre à : $A'R + RQ = A'Q$. — Cela posé, j'envisage comme fonctions d'une même variable l'arc d'ellipse $NA = s$ et le segment de tangente $AM = t$, de sorte qu'en faisant croître cette variable de sa différentielle on passe du point A au point A', ce qui donnera : $NA' = s + ds$, $A'M' = t + dt$.

Or ayant $A'M' = A'Q + QP + PM'$, on conclura de notre seconde relation, $QP = AM = t$, celle-ci, à savoir.

$$dt = ds + PM'.$$

Soient maintenant MB et $M'B'$ les autres tangentes menées par les points M et M' à l'ellipse ; si en désignant par B et B' les points de contact et par S la projection de M sur $M'B'$, on fait :

$$NB = s_1, \quad BM = t_1 ;$$

nous aurons de même :

$$dt_1 = ds_1 + SM'.$$

Mais, d'après la propriété de l'hyperbole homofocale, les angles de la tangente MM' avec les tangentes $M'A'$, $M'B'$ sont égaux ; il en résulte que $PM' = SM'$, et par suite :

$$dt - dt_1 = ds - ds_1 ;$$

on en conclut :

$$t - t_1 = s - s_1 = \text{const.},$$

et j'ajoute que la constante est nulle, car les deux arcs et les deux segments de la tangente s'évanouissent en même temps quand on fait coïncider les points M et N.

Ces résultats font voir combien, par leur nature, les arcs d'ellipse diffèrent des arcs de cercle, aussi n'est-il pas possible de généraliser les fonctions circulaires en considérant, ainsi qu'il semblerait si naturel, l'abscisse et l'ordonnée d'un point de l'ellipse comme des fonctions de l'arc compté depuis une origine fixe jusqu'à ce point. Ce n'est donc pas la relation :

$$\int_0^x \sqrt{\frac{1-k^2x^2}{1-x^2}} = \xi$$

qui conduit à une expression analogue à $x = \sin \xi$; la fonction ainsi définie est d'une nature extrêmement complexe et sans aucun rapport avec le sinus qu'on obtient en posant :

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \xi$$

La véritable analogie se réalise si l'on égale à une variable ξ la fonction de première espèce :

$$\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} \quad \text{, ou bien :} \quad \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$$

en faisant $x = \sin\varphi$, de sorte que c'est par la voie du calcul intégral et non de la géométrie qu'on est conduit aux nouvelles transcendantes qui ont pris sous le nom de fonctions elliptiques, une si grande place dans la science de notre temps.

L'étude de la fonction définie par l'égalité :

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = \xi$$

est l'objet essentiel de la théorie des fonctions elliptiques. Avant de l'entreprendre, nous avons à exposer les principes d'analyse sur lesquels elle repose, et qui seront l'objet principal de ce cours. Mais elle a pour préliminaires des questions faciles et élémentaires d'algèbre et de calcul intégral dont nous allons maintenant nous occuper.

Voici en premier lieu la forme simple à laquelle se ramène toute fonction rationnelle $f(x, \sqrt{R})$ de x et de la racine carrée d'un polynôme R du quatrième degré ou même d'un degré quelconque. On peut d'abord écrire :

$$f(x, \sqrt{R}) = \frac{A + B\sqrt{R}}{C + D\sqrt{R}},$$

en désignant par A, B, C, D, des polynômes, attendu que toute fonction rationnelle de deux quantités est le quotient de fonctions entières de ces quantités. Multiplions maintenant haut et bas par $C - D\sqrt{R}$ nous obtiendrons l'expression $M + N\sqrt{R}$ ou encore, $M + \frac{N}{\sqrt{R}}$, dans laquelle M et N sont des fonctions rationnelles. C'est le résultat qu'il s'agissait d'obtenir, on en tire cette conséquence importante que l'intégrale $\int f(x, \sqrt{R})\,dx$, si l'on fait abstraction du terme $\int M\,dx$, se ramène à $\int \frac{N\,dx}{\sqrt{R}}$ qui en représente la partie essentielle, c'est la quantité dont nous allons nous occuper, en supposant maintenant que R soit un polynôme du quatrième degré à coëfficients réels. Nous ferons d'abord un changement de variable en employant la substitution donnée dans la 2me leçon.

$$x = \frac{p+qt}{1+t}$$

au moyen de laquelle on obtient

$$R = \frac{A + Bt^2 + Ct^4}{(1+t)^4};$$

l'intégrale $\int \frac{N\,dx}{\sqrt{R}}$ devient ainsi $\int \frac{P\,dt}{\sqrt{A+Bt^2+Ct^4}}$, où P est une fonction rationnelle que je représenterai par le quotient de deux polynômes entiers $\frac{F(t)}{F_1(t)}$. Cela étant après avoir écrit :

$$P = \frac{F(t)\,F_1(-t)}{F_1(t)\,F_1(-t)}$$

j'observe que le dénominateur ne contient que des puissances paires et qu'en groupant

dans le numérateur les puissances paires et les puissances impaires de la variable nous aurons cette expression :

$$P = \varphi(t^2) + t\,\psi(t^2)$$

On conclut de là :

$$\int \frac{P\,dt}{\sqrt{A+Bt^2+Ct^4}} = \int \frac{\varphi(t^2)\,dt}{\sqrt{A+Bt^2+Ct^4}} + \int \frac{t\,\psi(t^2)\,dt}{\sqrt{A+Bt^2+Ct^4}}$$

puis au moyen de la solution $t^2 = u$:

$$\int \frac{\varphi(t^2)\,dt}{\sqrt{A+Bt^2+Ct^4}} = \frac{1}{2}\int \frac{\varphi(u)\,du}{\sqrt{Au+Bu^2+Cu^3}}$$

$$\int \frac{t\,\psi(t^2)\,dt}{\sqrt{A+Bt^2+Ct^4}} = \frac{1}{2}\int \frac{\psi(u)\,du}{\sqrt{A+Bu+Cu^2}}$$

la première quantité est donc seule à considérer, la seconde s'obtenant par les méthodes connues.

Nous aurons un exemple de ces expressions en faisant $x^2 = u$ dans les intégrales.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}, \quad \int \frac{\sqrt{1-k^2x^2}}{\sqrt{1-x^2}}\,dx,$$

qui deviennent

$$\frac{1}{2}\int \frac{du}{\sqrt{u(1-u)(1-k^2u)}}, \quad \frac{1}{2}\int \frac{(1-k^2u)\,du}{\sqrt{u(1-u)(1-k^2u)}}$$

Le polynôme du troisième degré qui entre sous le radical carré se présente alors sous une forme particulière à laquelle on donne le nom de canonique ; un point important que nous allons maintenant traiter consiste à ramener à cette forme canonique le radical contenu dans l'intégrale $\int \frac{\varphi(u)\,du}{\sqrt{Au+Bu^2+Cu^3}}$.

Supposons réelles en premier lieu les racines de l'équation $A + Bu + Cu^2 = 0$, je distinguerai suivant leurs signes, trois formes du polynôme $Au + Bu^2 + Cu^3$, que je représente ainsi :

$$Au(1-au)(1-bu),$$

$$Au(1-au)(1+bu),$$

$$Au(1+au)(1+bu),$$

en désignant par a et b, deux quantités positives. Elles deviennent en changeant u en $\frac{u}{a}$ et posant $\frac{b}{a} = m$:

$$\frac{A}{a}u(1-u)(1-mu),$$

$$\frac{A}{a}u(1-u)(1+mu),$$

$$\frac{A}{a}u(1+u)(1+mu),$$

la première donne immédiatement la forme canonique, car on peut prendre $b < a$ et faire par conséquent $m = k^2$.

La seconde s'y ramène par la substitution, $u = 1-z$, elle devient en effet :

$$\frac{AA}{a(1+m)} \quad z(1-z)\left[1-\frac{m}{1+m}z\right]$$

et l'on peut poser $\frac{m}{1+m} = k^2$.

Pour la troisième on fera $u = \frac{z}{1-z}$ ce qui conduit à la relation :

$$\frac{du}{\sqrt{u(1+u)(1+mu)}} = \frac{dz}{\sqrt{z(1-z)[1-(1-m)z]}}$$

et comme rien n'empêche d'admettre qu'on ait pris $b < a$, on aura $m < 1$ ce qui permet de faire $1-m = k^2$.

Il importe encore d'observer que le coefficient A peut être négatif, dans ce cas nous emploierons la substitution $z = \frac{\zeta}{\zeta - 1}$ d'où l'on conclut :

$$\frac{dz}{\sqrt{z(1-z)(1-k^2z)}} = -\frac{d\zeta}{\sqrt{-\zeta(1-\zeta)(1-k'^2\zeta)}}$$

et par conséquent une transformée contenant le radical $\sqrt{-A\zeta(1-\zeta)(1-k'^2\zeta)}$, qui est mis sous forme réelle.

Supposons maintenant que les racines de l'équation $A + Bu + Cu^2 = 0$ soient imaginaires ; je partirai de cette remarque qu'en posant, $z = \frac{4u}{(1+u)^2}$ on obtient la relation :

$$\frac{2\,du}{\sqrt{u+(2-4k^2)u^2+u^3}} = \frac{dz}{\sqrt{z(1-z)(1-k^2z)}}$$

où le trinôme $1+(2-4k^2)u+u^2$, a ses racines imaginaires, si nous admettons qu'on ait $k^2 < 1$. Je remarquerai ensuite que de la valeur de u à savoir :

$$u = \frac{2 - z \pm \sqrt{1-z}}{z}$$

on tire l'expression :

$$\varphi(u) = f(z) + f_1(z)\sqrt{1-z}$$

où les fonctions $f(z)$ et $f_1(z)$ sont rationnelles, et l'on en conclut :

$$\int \frac{\varphi(u)\,du}{\sqrt{u+(2-4k^2)u^2+u^3}} = \int \frac{f(z)\,dz}{\sqrt{z(1-z)(1-k^2z)}} + \int \frac{f_1(z)\,dz}{\sqrt{z(1-k^2z)}}$$

C'est par conséquent la réduction à la forme canonique de l'intégrale du premier membre puisque la quantité $\int \frac{f_1(z)\,dz}{\sqrt{z(1-k^2z)}}$ s'obtient sous forme explicite. Qu'on change u en nu, il est aisé de voir qu'en introduisant un autre facteur constant $\frac{A}{n}$ on peut disposer de k^2 de manière à avoir :

$$Au + An(2-4k^2)u^2 + An^2u^3 = Au + Bu^2 + Cu^3$$

On obtient en effet : $n = \sqrt{\frac{C}{A}}$, et $k^2 = \frac{2\sqrt{AC}-B}{4\sqrt{AC}}$ valeur positive et moindre que

l'unité d'après la condition admise $B^2 < 4AC$.

La substitution $z = \frac{4u}{(1+u)^2}$ que nous venons d'employer, donne lieu à cette remarque que les racines de l'équation du second degré en u étant réciproques, on a à la fois :

$$u = \frac{2 - z + \sqrt{1-z}}{z}$$

et :

$$\frac{1}{u} = \frac{2 - z - \sqrt{1-z}}{z}$$

Supposons donc qu'on ait $\varphi(u) = -\varphi\left(\frac{1}{u}\right)$, l'expression de $\varphi(u)$ en z devant changer de signe avec le radical $\sqrt{1-z}$ se réduit à la forme,

$$\varphi(u) = f_1(z)\sqrt{1-z},$$

et l'on voit qu'alors l'intégrale $\int \frac{\varphi(u)\, du}{\sqrt{u + (2-4k^2)u^2 + u^3}}$ s'obtient sous forme finie.

Afin de familiariser avec l'emploi des substitutions dans les intégrales elliptiques, j'indiquerai encore d'autres exemples, où elles se réduisent par un changement de variables aux intégrales de simples fonctions rationnelles.

Soit :
$$R(x) = (1-x^2)(1-k^2x^2)$$

Je considère d'abord l'expression.

$$\int \frac{f(x^2)\, dx}{\sqrt{R(x)}}$$

où $f(x^2)$ est une fonction rationnelle telle qu'on ait :

$$f(x^2) = -f\left(\frac{1}{k^2x^2}\right).$$

Je fais maintenant :
$$y = \frac{\sqrt{R(x)}}{x},$$

ce qui donne l'équation ;
$$k^2x^4 - (1+k^2+y^2)x^2 + 1 = 0,$$

et en résolvant :

$$x^2 = \frac{1+k^2+y^2+\sqrt{R_1(y)}}{2k^2}$$

si l'on pose :

$$R_1(y) = (1+k^2+y^2)^2 - 4k^2;$$

Nous avons pris pour x^2 une des deux racines de l'équation écrite plus haut, leur produit est $\frac{1}{k^2}$, l'autre racine est donc :

$$\frac{1}{k^2x^2} = \frac{1+k^2+y^2-\sqrt{R_1(y)}}{2k^2}$$

Soit donc :

$$f(x^2) = G + H\sqrt{R_1(y)}$$

G et H étant des fonctions rationnelles de y, on aura :

$$f\left(\frac{1}{k^2x^2}\right) = G - H\sqrt{R_1(y)};$$

et de la condition : $f(x^2) + f\left(\frac{1}{k^2x^2}\right) = 0$, on conclut $G = 0$, de sorte qu'il vient simplement :

$$f(x^2) = H\sqrt{R_1(y)}$$

En différentiant maintenant l'équation :

$$k^2x^4 - (1 + k^2 + y^2)x^2 + 1 = 0$$

on trouve :

$$dx\left[2k^2x^3 - (1+k^2+y^2)x\right] - yx^2dy = 0,$$

puis :

$$dx\left[2k^2x^2 - (1+k^2+y^2)\right] = xy\,dy,$$

ou encore :

$$dx\sqrt{R_1(y)} = dy\sqrt{R(x)},$$

et finalement :

$$\frac{dx}{\sqrt{R(x)}} = \frac{dy}{\sqrt{R_1(y)}}$$

L'intégrale demandée devient donc $\int H\,dy$, ainsi que nous l'avons annoncé.

Voici encore deux autres réductions analogues que nous allons indiquer :

La différentielle $\frac{f(x^2)\,dx}{\sqrt{R(x)}}$ se ramènera toujours à une différentielle rationnelle si l'on a :

$$f(x^2) = -f\left(\frac{1-k^2x^2}{k^2-k^2x^2}\right)$$

ou bien :

$$f(x^2) = -f\left(\frac{1-x^2}{1-k^2x^2}\right).$$

Dans le premier cas, on posera :

$$y = \frac{x\sqrt{1-k^2x^2}}{\sqrt{1-x^2}},$$

et dans le second :

$$y = \frac{x\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-k^2x^2}}$$

Soit pour abréger :

$$R_2(y) = (1+y^2)^2 - 4k^2y^2,$$

$$R_3(y) = (1+k^2y^2)^2 - 4y^2.$$

Ces substitutions donnent les relations suivantes, qui appartiennent à la transformation du second ordre des fonctions elliptiques, à savoir :

$$\frac{dx}{\sqrt{R(x)}} = \frac{dy}{\sqrt{R_2(y)}},$$

$$\frac{dx}{\sqrt{R(x)}} = \frac{dy}{\sqrt{R_3(y)}}$$

La formule suivante qui est d'une grande importance dans cette théorie se présente sous forme rationnelle. On a alors :

$$y = \frac{(1+k)x}{1+kx^2}$$

et l'on en tire :

$$\sqrt{1-y^2} = \frac{\sqrt{R(x)}}{1+kx^2}$$

$$\sqrt{1-l^2y^2} = \frac{1-kx^2}{1+kx^2}$$

en posant, $l = \frac{2\sqrt{k}}{1+k}$. De là résulte, si nous écrivons pour mettre le module en évidence, $R(x,k)$ au lieu de $R(x)$,

$$\sqrt{R(y,l)} = \frac{(1-kx^2)\sqrt{R(x,k)}}{1+kx^2};$$

il est aisé d'en conclure,

$$\frac{dy}{\sqrt{R(y,l)}} = \frac{(1+k)\,dx}{\sqrt{R(y,k)}}$$

puis en observant que y s'évanouit avec x :

$$\int_0^y \frac{dy}{\sqrt{R(y,l)}} = (1+k)\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{R(x,k)}}$$

J'ajoute qu'en désignant par $V = 1+kx^2$ le dénominateur de la formule de substitution, nous aurons entre les intégrales de seconde espèce, la relation :

$$(1+k)\int_0^y \frac{l^2y^2\,dy}{\sqrt{R(y,l)}} = 2\int_0^x \frac{k^2x^2\,dx}{\sqrt{R(x,k)}} + 2k\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{R(x,k)}} - \frac{V'\sqrt{R(x,k)}}{V}$$

Pour le vérifier nous remplacerons dans le premier membre $\frac{dy}{\sqrt{R(y,l)}}$ par $\frac{(1+k)\,dx}{\sqrt{R(x,l)}}$, l par $\frac{2\sqrt{k}}{1+k}$; cela étant, nous trouvons en différentiant :

$$\frac{4ky^2}{\sqrt{R(x,k)}} = \frac{2k^2x^2+2k}{\sqrt{R(x,k)}} - \frac{2k\left[1-(2+k+2k^2)x^2+3k^2x^4+k^3x^6\right]}{(1+kx^2)^2\sqrt{R(x,k)}}$$

Mettons encore au lieu d y sa valeur $\frac{(1+k)x}{1+kx^2}$, en remarquant qu'on peut écrire :

$$1-(2+k+2k^2)x^2+3k^2x^4+k^2x^6 = (1+kx^2)^3 - 2(1+k)^2x^2,$$

on obtient après avoir chassé les dénominateurs une relation identique.

Nous retrouverons bientôt ce résultat sous une forme plus générale, je me borne en ce moment à en tirer le théorème auquel est attaché le nom de Landen, qui donne l'expression d'un arc d'hyperbole par deux arcs d'ellipse et une quantité algébrique.

Je remarque à cet effet qu'en désignant par $E(x,k)$ l'arc d'ellipse représenté par l'intégrale $\int_0^x \frac{(1-k^2x^2)\,dx}{\sqrt{R(x,k)}}$, on a l'égalité suivante.

$$\int_0^x \frac{k^2x^2\,dx}{\sqrt{R(x,k)}} = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{R(x,k)}} - E(x,k)$$

et par conséquent :

$$\int_0^y \frac{l^2 y^2 dy}{\sqrt{R(y,l)}} = \int_0^y \frac{dy}{\sqrt{R(y,l)}} - E(y,l)$$

Substituons dans la relation précédente et faisons usage de la condition :

$$\int_0^y \frac{dy}{\sqrt{R(y,l)}} = (1+k) \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{R(x,k)}},$$

on trouvera ainsi :

$$(1+k) E(y,l) = 2 E(x,k) - k'^2 \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{R(x,k)}} + \frac{V' \sqrt{R(x,k)}}{V}$$

On voit donc que l'intégrale de première espèce peut s'exprimer au moyen de deux arcs d'ellipse, par cette formule :

$$k'^2 \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{R(x,k)}} = 2 E(x,k) - (1+k) E(y,l) + \frac{V' \sqrt{R(x,k)}}{V}$$

Cela posé je reviens à l'expression de l'arc d'hyperbole donnée par Legendre :

$$\Upsilon = b^2 \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{b^2 \sin^2\varphi + c^2 \cos^2\varphi}} - \int_0^\varphi \sqrt{b^2 \sin^2\varphi + c^2 \cos^2\varphi}\, d\varphi + \operatorname{tang}\varphi \sqrt{b^2 \sin^2\varphi + c^2 \cos^2\varphi}$$

Je fais :

$$\sin\varphi = x \text{ et } \frac{a}{c} = k,$$

de sorte qu'on aura :

$$\frac{b}{c} = k', \quad \sqrt{b^2 \sin^2\varphi + c^2 \cos^2\varphi} = c\sqrt{1 - k^2 x^2}$$

et par conséquent :

$$\frac{\Upsilon}{c} = k'^2 \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{R(x,k)}} - E(x,k) + \frac{x\sqrt{1-k^2x^2}}{\sqrt{1-x^2}}$$

Le théorème de Landen s'obtient en remplaçant dans cette formule l'intégrale de première espèce par l'expression qui vient d'être donnée et si l'on suppose pour plus de simplicité $c = 1$, on aura ainsi :

$$\Upsilon = E(x,k) - (1+k) E(y,l) + \frac{x(1+2k-kx^2)\sqrt{R(x,k)}}{(1-x^2)(1+kx^2)} \; (*)$$

(*) Voir dans le Bulletin de la Société Mathématique de France deux beaux travaux de Mr. Raffy et de Mr. Goursat, intitulés : Sur les transformations invariantes des différentielles elliptiques. T. XX ; Note sur quelques intégrales pseudo-elliptiques. T. XV.

IVe Leçon.

Nous avons vu que l'expression $\int f(x, \sqrt{R})\,dx$, où R est un polynôme en x de degré quelconque, et $f(x, \sqrt{R})$ une fonction rationnelle de la variable et de $\sqrt{R}$, se ramène à l'intégrale $\int \frac{N\,dx}{\sqrt{R}}$ dans laquelle N est une fonction rationnelle. L'objet de cette leçon est d'établir que cette quantité à laquelle on donne le nom d'intégrale hyperelliptique s'obtient d'une part par un terme algébrique, et de l'autre par une somme d'un nombre fini d'intégrales spéciales, qui en sont les éléments essentiels. Ce sera par conséquent à l'égard de ces expressions d'une nature plus complexe le même résultat que pour l'intégrale des fonctions rationnelles qui contient aussi deux parties, l'une rationnelle et l'autre transcendante, de la forme $A\log(x-a) + B\log(x-b) + \ldots\ldots$

Soit $N = \frac{\Pi}{\Phi}$, Π et Φ étant des polynômes entiers; je fais la supposition essentielle que R n'ait pas de facteurs multiples et je distingue dans le dénominateur Φ, les facteurs premiers à R, et ceux qui appartiennent à ce polynôme. Nommons les premiers $A^{a+1}, B^{b+1}, \ldots$ en mettant en évidence leurs ordres de multiplicité, de sorte que A, B, ... n'aient plus que des diviseurs simples et soient premiers deux à deux; désignons semblablement les autres par S^s, T^t, etc je partirai de la décomposition suivante:

$$\frac{\Pi}{\Phi} = \frac{G}{A^{a+1}} + \frac{H}{B^{b+1}} + \ldots\ldots + \frac{P}{S^s} + \frac{Q}{T^t} + \ldots\ldots,$$

où les numérateurs G, H, ... des fractions dans le second membre sont des polynômes entiers. Ceci posé, j'observe que A n'ayant que des facteurs simples, est premier avec sa dérivée A', par hypothèse il l'est également avec R, il est donc possible de déterminer deux polynômes entiers M et N, tels qu'on ait:

$$G = MA - aNRA'$$

Soit de plus:

$$D_x(N\sqrt{R}) = \frac{N_1}{\sqrt{R}},$$

où N_1 désigne aussi un polynôme entier, nous aurons la relation suivante dans laquelle l'exposant a doit être supposé différent de zéro et qui se vérifie immédiatement en différentiant, à savoir:

$$\int \frac{G\,dx}{A^{a+1}\sqrt{R}} = \frac{N\sqrt{R}}{A^a} + \int \frac{(M - N_1)\,dx}{A^a\sqrt{R}}$$

C'est une formule de réduction qui appliquée successivement jusqu'à ce que l'exposant de A devienne égal à l'unité, ramène de proche en proche l'intégrale $\int \frac{G\,dx}{A^{a+1}\sqrt{R}}$ à un terme algébrique et à la suivante: $\int \frac{G_1\,dx}{A\sqrt{R}}$, où G_1 est comme G un polynôme entier.

De la même manière se réduiront les parties de l'intégrale proposée qui

correspondent aux autres fractions $\frac{H}{B^{b+1}}$, etc, mais les termes tels que $\int \frac{P\,dx}{S^s\sqrt{R}}$ comme on va voir, demandent une modification dans le procédé.

Je pose d'abord :

$$R = SU,$$

et j'observe que R n'ayant pas de facteurs multiples, les polynômes S et US' sont premiers entre eux, on peut donc écrire :

$$P = MS - (s - \tfrac{1}{2}) NUS'.$$

Faisons aussi :

$$D_x (N\sqrt{U}) = \frac{N_1}{\sqrt{U}},$$

et nous aurons cette nouvelle formule de réduction :

$$\int \frac{P\,dx}{S^s\sqrt{R}} = \frac{N\sqrt{R}}{S^s} + \int \frac{M - N_1}{S^{s-1}\sqrt{R}}\,dx,$$

qui se vérifie encore par la différentiation. On remarque qu'elle ne souffre pas d'exception comme la précédente, et qu'on peut l'appliquer à toute valeur entière de l'exposant s, de sorte que les diverses intégrales $\int \frac{P\,dx}{S^s\sqrt{R}}$ seront ramenées à une quantité algébrique et à celle-ci $\int \frac{P_1\,dx}{\sqrt{R}}$, où P_1 est un polynôme entier.

En réunissant les résultats qui précèdent, on parvient à cette conclusion.

Soit : $F = AB$ ...., le produit des facteurs simples de $\Phi(x)$, qui n'appartiennent pas à R, on peut écrire :

$$\Phi = FF_1,$$

si l'on pose :

$$F_1 = A^a B^b \ldots\ldots S^s T^t \ldots\ldots,$$

et l'on a l'expression suivante : $\int \frac{\Pi\,dx}{\Phi\sqrt{R}} = \int \frac{J\,dx}{F\sqrt{R}} + \frac{J_1\sqrt{R}}{F_1}$,

où J et J_1 sont des polynômes entiers.

C'est l'expression $\int \frac{J\,dx}{F\sqrt{R}}$, à laquelle nous avons ainsi ramené la proposée qui va nous conduire à ces nouveaux éléments analytiques qui correspondent aux termes logarithmiques dans l'intégrale des fonctions rationnelles. Mais auparavant, voici une remarque que nous devons encore faire.

Soit E la partie entière de $\frac{J}{F}$, l'intégrale $\int \frac{E\,dx}{\sqrt{R}}$ donne lieu à une nouvelle et importante réduction.

Posons à cet effet

$$\int \frac{E\,dx}{\sqrt{R}} = K\sqrt{R} + \int \frac{L\,dx}{\sqrt{R}}$$

K et L désignant des polynômes et proposons-nous de déterminer le premier de manière que le degré de L soit le plus petit possible. En divisant par $\sqrt{R}$ les deux membres de cette relation, ce qui donne :

$$\frac{1}{\sqrt{R}}\int\frac{E\,dx}{\sqrt{R}}=K+\frac{1}{\sqrt{R}}\int\frac{L\,dx}{\sqrt{R}},$$

on reconnait qu'il faut prendre pour K, la partie entière du développement du premier membre suivant les puissances descendantes de la variable. Cela étant, soit l le degré de L et r le degré de R, l'exposant de la plus haute puissance de la variable, dans la quantité $\frac{1}{\sqrt{R}}\int\frac{L\,dx}{\sqrt{R}}$, est : $l-\frac{r}{2}+1-\frac{r}{2}$ c'est-à-dire $l+1-r$; cet exposant d'après la détermination de K, a pour limite supérieure -1 ; on a donc : $l+1-r=-1$, ou bien : $l=r-2$.

De là résulte qu'en posant :

$$\frac{J}{F}=E+\frac{I}{F},$$

de sorte que le degré de I soit inférieur à celui de F, on a l'expression suivante :

$$\int\frac{J\,dx}{F\sqrt{R}}=K\sqrt{R}+\int\frac{L\,dx}{\sqrt{R}}+\int\frac{I\,dx}{F\sqrt{R}};$$

on en conclut, si nous revenons à l'intégrale proposée :

$$\int\frac{\Pi\,dx}{\Phi\sqrt{R}}=\frac{\Theta\sqrt{R}}{F_1}+\int\frac{L\,dx}{\sqrt{R}}+\int\frac{I\,dx}{F\sqrt{R}}$$

en faisant, pour abréger :

$$\Theta=J_1+KF_1.$$

Ce résultat obtenu conduit à une question intéressante qui serait de chercher une détermination directe des polynômes I, L, Θ, par la méthode des coefficients indéterminés, en différentiant l'équation que nous venons d'écrire. Sans m'y arrêter, j'arrive immédiatement aux conséquences qu'il importe le plus d'en tirer.

La première découle des travaux d'Abel et de Liouville sur les intégrales des différentielles algébriques, dont la valeur est algébrique. Toutes les fois qu'il sera possible d'exprimer l'intégrale $\int\frac{\Pi\,dx}{\Phi\sqrt{R}}$ sous forme finie par des expressions de cette nature, sa valeur sera la quantité $\frac{\Theta\sqrt{R}}{F_1}$, et on l'obtiendra par l'équation précédente dans laquelle les polynômes I et L seront alors identiquement nuls.

La seconde consiste dans la notion des intégrales de première, de seconde et de troisième espèce. Elle repose sur cette remarque que l'intégrale $\int f(x,\sqrt{R})\,dx$, où R est de degré pair $2n$, peut être par une substitution ramenée à une autre de même forme.

$$\int f(s,\sqrt{S})\,ds,$$

dans laquelle S est de degré impair $2n-1$.

Soit en effet :

$$R = (x-a)(x-b) \ldots\ldots \ldots (x-h) ;$$

nous poserons :

$$\frac{x-b}{x-a} = s,$$

ce qui donne :

$$x = \frac{as-b}{s-1}$$

On observera ensuite qu'ayant $x - a = \frac{a-b}{s-1}$, les $2n-1$ facteurs $x-b, \ldots\ldots x-c$ sont des binômes de premier degré divisés par $s-1$, nous pouvons donc écrire :

$$R = \frac{S}{(s-1)^{2n}}, \qquad \sqrt{R} = \frac{\sqrt{S}}{(s-1)^n},$$

en désignant par S un polynôme dont le degré est $2n-1$.

Ce point établi, je reprends la relation générale :

$$\int \frac{\Pi\, dx}{\phi \sqrt{R}} = \frac{\Theta \sqrt{R}}{F_1} + \int \frac{L\, dx}{\sqrt{R}} + \int \frac{I\, dx}{F \sqrt{R}},$$

en admettant que R soit de degré impair $2n-1$.

Le terme $\int \frac{L\,dx}{\sqrt{R}}$ où L est de degré $2n-3$ nous donne l'origine des intégrales ou fonctions de première et de seconde espèce.

On donne le nom d'intégrales de première espèce aux quantités :

$$\int \frac{dx}{\sqrt{R}} \quad \int \frac{x\,dx}{\sqrt{R}}, \ldots\ldots \int \frac{x^{n-3} dx}{\sqrt{R}},$$

dont le développement suivant les puissances descendantes de la variable x pour premier terme une puissance où l'exposant est négatif.

Les autres :

$$\int \frac{x^{n-2} dx}{\sqrt{R}}, \quad \int \frac{x^{n-1} dx}{\sqrt{R}}, \ldots\ldots \int \frac{x^{2n-3} dx}{\sqrt{R}},$$

dans lesquelles le même développement commence par une puissance dont l'exposant est positif, sont les fonctions de seconde espèce.

Le second terme enfin, $\int \frac{I\,dx}{F\sqrt{R}}$, si l'on décompose la fonction rationnelle $\frac{I}{F}$ en fractions simples nous conduit aux intégrales de troisième espèce $\int \frac{dx}{(x-a)\sqrt{R}}$, et la constante a reçoit la désignation de paramètre.

Supposons, en particulier, $R = x(1-x)(1-k^2x)$; on aura alors une seule intégrale de première espèce : $\int \frac{dx}{\sqrt{R}}$, et une seule seconde espèce $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{R}}$; elles prennent par le simple changement de x en x^2 la forme canonique que nous avons précédemment indiquée, $\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$ et $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$ Dans ce cas des

intégrales elliptiques, la question qui vient d'être traitée conduit à des résultats intéressants d'Algèbre et de calcul intégral. En voici quelques-uns:

Soit: $$R(x) = (1-x^2)(1-k^2x^2).$$

on voit facilement, d'après ce qui précède, que l'on a:

$$\int \frac{(k^2x^2)^{n+1}dx}{\sqrt{R(x)}} = P\sqrt{R(x)} + A_n \int \frac{k^2x^2}{\sqrt{R(x)}} - B_n \int \frac{dx}{\sqrt{R(x)}},$$

P désignant un polynôme entier en x, A_n et B_n des constantes, qui se déterminent de la manière suivante.

On développera suivant les puissances croissantes de la variable ces expressions.

$$\frac{1}{\sqrt{R(x)}}\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{R(x)}}, \quad \frac{1}{\sqrt{R(x)}}\int_0^x \frac{k^2x^2\,dx}{\sqrt{R(x)}},$$

cela étant les coefficients de x^{2n+1} dans la première et la seconde série seront respectivement les quantités A_n et B_n.

Elles satisfont aux relations:

$$(2n+1)A_n - 2n(1+k^2)A_{n-1} + (2n-1)k^2A_{n-2} = 0.$$

$$(2n+1)B_n - 2n(1+k^2)B_{n-1} + (2n+1)k^2B_{n-2} = 0.$$

de sorte qu'en partant des deux premiers coefficients de chaque série on pourra obtenir tous les autres de proche en proche.

On en tire facilement l'égalité:

$$B_nA_{n-1} - A_nB_{n-1} = \frac{k^{2n}}{2n+1}$$

ce qui conduit à chercher une fraction continue dont les réduites seraient les quotients $\frac{B_n}{A_n}$.

Soit:

$$K = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{R(x)}}, \quad J = \int_0^1 \frac{k^2x^2\,dx}{\sqrt{R(x)}},$$

K étant la fonction complète de première espèce, et J la fonction complète de deuxième espèce, telle que la considère M.r Weierstrass. On a cette expression:

$$\frac{J}{K} = \cfrac{k^2}{2(1+k^2) - \cfrac{9k^2}{4(1+k^2) - \cfrac{25k^2}{6(1+k^2) \dots}}}$$

dont les réduites successives sont en effet les quantités $\frac{B_1}{A_1}$, $\frac{B_2}{A_2}$, etc.

On pouvait, d'ailleurs, voir à priori, comme conséquence immédiate de l'équation:

$$\int_0^x \frac{(k^2x^2)^{n+1}dx}{\sqrt{R(x)}} = P\sqrt{R(x)} + A_n\int_0^x \frac{k^2dx}{\sqrt{R(x)}} - B_n\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{R(x)}}$$

que $\frac{J}{K}$ est représenté aux termes près d'ordre $n+1$ en k^2 par le quotient $\frac{B_n}{A_n}$.

Il vient, en effet, si l'on pose $x=1$:

$$\int_0^x \frac{(k^2x^2)^{n+1}dx}{\sqrt{R(x)}} = A_n J - B_n K,$$

d'où :

$$\frac{J}{K} - \frac{B_n}{A_n} = \frac{1}{A_n K} \int_0^1 \frac{(k^2x^2)^{n+1}dx}{\sqrt{R(x)}},$$

et l'on établit ainsi que le développement en série du second membre suivant les puissances croissantes de k^2, commence bien par un terme en $(k^2)^{n+1}$.

Quant au polynôme P, nous allons, pour l'obtenir, suivre une méthode souvent employée par M.r Tchebycheff.

Ecrivons.

$$\frac{1}{\sqrt{R(x)}} \int_0^x \frac{(k^2x^2)^{n+1}dx}{\sqrt{R(x)}} = P + \frac{A_n}{\sqrt{R(x)}} \int_0^x \frac{x^2\,dx}{\sqrt{R(x)}} - \frac{B_n}{\sqrt{R(x)}} \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{R(x)}},$$

et développons le premier membre en série ordonnée suivant les puissances décroissantes de x. La partie entière de cette série sera le polynôme P ; il suffit pour le prouver de montrer que les développements des deux derniers termes du second membre ne peuvent conduire à des termes renfermant des puissances positives de la variable ; or, cette propriété est manifeste, le radical $\frac{1}{\sqrt{R(x)}}$, en effet, commence par un terme en $\frac{1}{x^2}$.

L'expression de l'arc d'une courbe unicursale :

$$x = \frac{V}{U}, \qquad y = \frac{W}{U},$$

U, V, W étant des polynômes entiers en t qui est :

$$\sigma = \int \frac{\sqrt{R(t)}}{U^2}\, dt.$$

où j'ai écrit, pour abréger :

$$R = (UV' - VU')^2 + (UW' - WU')^2,$$

nous offrira une application de la méthode générale de réduction des intégrales hyperelliptiques.

Remarquons d'abord que l'on a :

$$R = (V'U - U'V)^2 + (W'U - U'W)^2 = AU' + BU$$

$$\tfrac{1}{2} R' = (V'U - U'V)(V''U - U''V) + (W'U - U'W)(W''U - U''W) = AU'' + CU,$$

en posant :

$$A = (V^2 + W^2)U' - (VV' + WW')U$$

$$B = (V'^2 + W'^2)U - (VV' + WW')U'$$

$$C = (V'V'' + W'W'')U - (VV'' + WW'')U'$$

Cela étant, je considère le développement en fraction continue de $\frac{U'}{U}$, je forme l'avant dernière des réduites, $\frac{N}{P}$ qui donnera la relation :

$$\frac{U'}{U} - \frac{N}{P} = \frac{\varepsilon}{PU} \quad \text{c'est-à-dire} : PU' - NU = \varepsilon, \ \varepsilon \text{ étant } \pm 1.$$

Cette condition fait voir qu'en ajoutant la quantité $\frac{\varepsilon\sqrt{R}}{U^2}$ aux deux membres de l'identité suivante :

$$D_t\left[\frac{P\sqrt{R}}{U}\right] = \frac{P'U - PU'}{U^2}\sqrt{R} + \frac{PR'}{2U\sqrt{R}}$$

elle devient :

$$D_t\left[\frac{P\sqrt{R}}{U}\right] + \frac{\varepsilon\sqrt{R}}{U^2} = \frac{P' - N}{U}\sqrt{R} + \frac{PR'}{2U\sqrt{R}}$$

Remarquons ensuite que l'on obtient, au moyen des valeurs de R et $\frac{1}{2}R'$, en posant $P' - N = M$:

$$MR + \tfrac{1}{2}PR' = M\ (AU' + BU) + P(AU'' + CU)$$

$$= [MU' + PU'']A + [MB + PC]U,$$

et qu'en différentiant l'équation : $PU' - NU = 1$, il vient :

$$MU' + PU'' = N'U,$$

de sorte que dans le second membre le premier terme contient comme le second le facteur U. Il en résulte que nous pouvons écrire :

$$D_t\left[\frac{P\sqrt{R}}{U}\right] + \frac{\varepsilon\sqrt{R}}{U^2} = \frac{N'A + MB + PC}{\sqrt{R}},$$

on a, par conséquent, pour l'arc des courbes unicursales cette expression :

$$\sigma = \int \frac{\sqrt{R}}{U^2}dt = -\frac{\varepsilon P\sqrt{R}}{U} + \int \frac{N'A + MB + PC}{\sqrt{R}}dt,$$

dans laquelle n'entre aucune intégrale de troisième espèce, du type : $\int \frac{dt}{(t-a)\sqrt{R}}$.

Mais cette conclusion est en défaut, quand le polynôme $R(t)$ a des racines égales, comme le montrent les remarques suivantes dont je dois la communication à M. Raffy.

Supposons que U et U' ne soient pas premiers entre eux, ε sera non plus une constante mais le plus grand commun diviseur de U et U'.

On trouvera :

$$D_t\left(\frac{P\sqrt{R}}{U}\right) + \frac{\varepsilon\sqrt{R}}{U^2} = \frac{A\varepsilon'}{U\sqrt{R}} + \frac{N'A + MB + PC}{\sqrt{R}}$$

Or ε n'étant pas une constante, on ne peut plus tirer de cette relation $\int \frac{\sqrt{R}}{U^2}dt$. Il est d'ailleurs aisé de reconnaître que quand une courbe unicursale admet des directions asymptotiques multiples, son arc peut dépendre des intégrales de troisième espèce.

C'est ce qui a lieu notamment pour toutes les courbes de Serret dont les arcs s'expriment par des arcs de cercle (Cours de Calcul Diff. et Intégral, t. II, Ch. 4). En voici une: Si l'on prend:

$$x+iy=\frac{(t-i\alpha^2)^3}{(t+i\alpha)(t+i)^2} \qquad x-iy=\frac{(t+i\alpha)^3}{(t-i\alpha^2)(t-i)^2} \qquad \alpha^3=1$$

on aura:

$$d\sigma = \frac{\sqrt{3}\,dt}{1+t^2}$$

Mais je dis de plus que l'intégrale:

$$\sigma=\int\frac{\sqrt{R(t)}}{U^2}\,dt,$$

et l'on a posé:

$$R(t)=(V'^2+W'^2)U^2-2(W'+WW')UU'+(V^2+W^2)U'^2.$$

admettra comme infinis logarithmiques toutes les racines supposées simples de U qui seront racines doubles de V^2+W^2.

Soit t_1 l'une d'elles; on aura:

$$U=(t-t_1)\,U_1$$

$$V^2+W^2=(t-t_1)^2 Q$$

$$2(VV'+WW')=(t-t_1)[2Q+(t-t_1)Q']=(t-t_1)\,Q_1$$

et il viendra

$$R(t)=(t-t_1)^2\left[(V'^2+W'^2)U_1^2-Q_1U'+QU'^2\right]$$

d'où

$$\sigma=\int\frac{\sqrt{R(t)}}{U^2}dt=\int\frac{\sqrt{(V'^2+W'^2)U_1^2-Q_1U_1^2+QU'^2}}{(t-t_1)\,U_1^2}\,dt$$

ce qui montre bien que $t=t_1$ est un infini logarithmique de σ.

C'est ce qui a lieu pour le cercle.

$$x=\frac{1-t^2}{1+t^2} \qquad y=\frac{2t}{1+t^2}$$

Ici $\qquad U=1+t^2 \quad V=1-t^2 \quad W=2t$

On a:

$$V^2+W^2=(1+t^2)^2$$

On trouve effectivement:

$$d\sigma=\frac{2\,dt}{1+t^2}$$

bien que U ait ses deux racines distinctes.

Quand V^2+W^2 a des racines communes avec U, la courbe passe par les points circulaires à l'infini. Il faut donc exclure de l'énoncé les courbes unicursales qui passent par les points circulaires à l'infini.

J'ajoute que l'arc admettra comme infinis logarithmiques les racines simples

communes à U et V^2+W^2, qu'on voit aisément être racines doubles de $R(t)$, et enfin que l'on doit exclure le cas où U est constant, comme le montre l'exemple de la parabole $y^2 = 2px$, dont l'arc s'exprime par un logarithme.

5ème Leçon.

Volumes, Quadrature des surfaces courbes, Intégrales doubles.

La détermination des volumes limités par des surfaces quelconques, et de l'aire des surfaces courbes, sont les questions qui s'offrent après la quadrature et la rectification des courbes planes. Elles sont l'origine de notions analytiques nouvelles et d'une grande importance, auxquelles on est naturellement amené, en donnant une définition précise et rigoureuse de la notion de volume. Nous nous placerons, à cet effet, dans les circonstances les plus simples, nous considérerons un cylindre droit $F(x, y) = 0$, et nous définirons comme il suit le volume de ce cylindre compris entre le plan des xy et la surface représentée par l'équation : $z = f(x, y)$.

Je décompose la base ABC d'une manière quelconque en portions telles que abc, dont je désigne les aires par $s, s', s'', \ldots\ldots$, la surface totale de la courbe sera ainsi : (fig. 13)

$$S = s + s' + s'' + \ldots\ldots$$

Je prends ensuite arbitrairement un point M à l'intérieur de chacune de ces portions et je mène l'ordonnée correspondante MN de la surface $z = f(x, y)$.

Fig. 13

Cela étant si l'on désigne les ordonnées relatives aux aires $s, s', s'', \ldots\ldots$ par $z, z', z'', \ldots\ldots$, le volume V du cylindre sera la somme :

$$sz + s'z' + s''z'' + \ldots\ldots\ldots\ldots = \Sigma sz$$

lorsque les surfaces $s, s', s'', \ldots\ldots$ décroissent indéfiniment.

On remarquera la complète analogie de cette définition avec celle de l'aire d'une courbe plane $y = f(x)$, qui a conduit à la notion de l'intégrale $\int f(x)dx$. Nous devons encore, comme nous l'avons fait à l'égard de l'aire, établir par la voie du calcul l'existence d'une limite déterminée, unique, pour la quantité Σsz ; c'est ce qui va nous conduire à la notion analytique nouvelle d'intégrale double.

J'admettrai que la fonction $f(x, y)$, pour la portion de la surface $z = f(x, y)$

qui est comprise à l'intérieur du cylindre, ne soit susceptible que d'une détermination et remplisse la condition suivante.

Ayant pris sur la surface deux points quelconques auxquels correspondent les ordonnées z_0 et Z et qui se projètent en A et B sur le plan des xy, j'envisage la courbe d'intersection déterminée par le plan de ces ordonnées dont la trace est la droite AB. L'équation du plan sécant sera de la forme $y = ax + b$ et la relation $z = f(x, ax+b)$ donne la projection de cette intersection sur le plan des zx. Cela étant, je pose comme condition de continuité, que l'ordonnée z de la courbe, passe par toutes les valeurs comprises entre z_0 et Z.

Soit donc ζ une telle valeur, on pourra écrire :

$$\zeta = f(\xi, \eta),$$

où ξ et η désignent les coordonnées d'un certain point de la droite AB.

Ceci posé, je remarque qu'on obtient deux limites entre lesquelles est comprise la somme Σsz, si l'on remplace les ordonnées z successivement par la plus petite et la plus grande d'entre elles, il en résulte que ζ étant une quantité comprise entre ces ordonnées minima et maxima, on a :

$$\Sigma sz = \Sigma \zeta z = S\zeta$$

et d'après ce qu'on vient de dire :

$$\Sigma sz = Sf(\xi, \eta).$$

Concevons maintenant qu'on subdivise en aires plus petites chacune des aires $s, s', s'', \ldots\ldots$ et comparons la nouvelle somme qui résulte de ces décompositions à la précédente. Chaque portion s donne une somme partielle, qu'on peut, comme on l'a vu, exprimer par $s\zeta$, ζ désignant une ordonnée de la surface qui correspond à un point pris à l'intérieur de s. Notre seconde somme est ainsi :

$$s\zeta + s'\zeta' + s''\zeta'' + \ldots\ldots;$$

en la retranchant de la première, on a pour différence :

$$s(z-\zeta) + s'(z'-\zeta') + s''(z''-\zeta'') + \ldots\ldots,$$

c'est à dire le produit de S par une moyenne entre

$$z-\zeta, \quad z'-\zeta', \quad z''-\zeta'', \text{ etc.}$$

Or ces quantités diminuent autant qu'on le veut, lorsque les aires $s, s', s'', \ldots\ldots$ sont suffisamment petites, puisque ce sont les différences entre les ordonnées de deux points de l'intérieur de chacune d'elles, qui se rapprochent indéfiniment. Il est donc prouvé que les décompositions suivant une loi déterminée de la base du cylindre en parties qui toutes vont en décroissant, conduisent à une limite pour la somme par laquelle a été défini le volume du cylindre ; il ne reste plus qu'à montrer comment toutes les lois de décomposition donnent la même limite. Afin de comparer les résultats relatifs à deux décompositions différentes en segments de la base ABC, on en considérera une troisième obtenue en réunissant des segments assez petits pour être à la fois contenus dans la première et la seconde. Or, on vient de voir que la variation en passant de la première décomposition à la troisième, comme de la seconde

à la troisième, peut devenir moindre que toute quantité donnée; il est donc prouvé, comme il s'agissait de l'établir, que les deux premières conduisent à la même limite.

Après avoir donné la définition des volumes, nous passons à l'aire des surfaces courbes qu'on a longtemps considérée de la manière suivante: (*)

« Soit une portion de surface courbe terminée par un contour C, nous nommerons « aire de cette surface la limite S vers laquelle tend l'aire d'une surface polyédrale inscrite « formée de faces triangulaires et terminée par un contour polygonal ayant pour limite la courbe C. »

Les difficultés auxquelles donnent lieu une telle définition, ont été signalées par M. Schwarz de Göttingue, et on lira avec le plus grand fruit, dans la seconde édition de ce cours, p. 35, la communication qui m'a été adressée sur ce point par l'illustre géomètre. Nous abandonnerons donc la surface polyédrale qui est l'analogue du polygone inscrit dans un arc de courbe, au moyen duquel se définit la longueur de cet arc.

Fig. 14

Nous suivrons une autre analogie à laquelle conduit la remarque faite p. 3 qu'on peut substituer aux côtés GH du polygone (fig. 14) la série des segments non contigus JK. ces segments étant les portions comprises entre les ordonnées GE et HF, d'une tangente en un point quelconque I de l'arc GH.

Soit $z = f(x, y)$ l'équation de la surface et ABC la projection sur le plan des xy d'une courbe qui limite une portion de cette surface. Comme éléments géométriques analogues aux segments de tangentes dont nous venons de parler, nous prendrons les aires planes suivantes.

Fig. 15

Soit abc un contour tracé d'une manière quelconque à l'intérieur de ABC; je construis le cylindre droit qui a pour trace ce contour, et ensuite le plan tangent en un point de la surface, qui se projète à son intérieur. Ce plan coupe le cylindre suivant une courbe ghk; c'est l'élément plan, que je fais correspondre à abc. Désignant par φ l'angle du plan tangent avec le plan des xy, et soit x, y, z les coordonnées du point de contact, on a comme on sait:

$$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{df}{dx}\right)^2+\left(\frac{df}{dy}\right)^2}}$$

ou bien:

$$\cos\theta = \frac{1}{\varphi(x,y)},$$

(*) J. A. Serret, cours de calcul différentiel et intégral, 2e édition, tome second, p. 293.

en faisant pour abréger :

$$\varphi(x,y) = \sqrt{1+\left(\frac{df}{dx}\right)^2+\left(\frac{df}{dy}\right)^2}.$$

Soit encore s l'aire de $a\,b\,c$, t l'aire de $g\,h\,k$, la relation :

$$s = t \cos\theta ,$$

nous donnerons :

$$t = s\,\varphi(x,y).$$

Cela étant, concevons la courbe ABC décomposée en portions dont les aires soient $s, s', s'', \ldots\ldots$ et désignons les éléments plans correspondants par $t, t', t'', \ldots\ldots$ L'aire de la surface courbe sera définie par la limite de la somme $t+t'+t''+\ldots\ldots$ lorsqu'on fait décroître indéfiniment $s, s', s'' \ldots\ldots$ Cette somme, si nous posons pour un moment $Z = \varphi(x,y)$ sera au moyen de la formule précédente, représentée par l'expression : $\Sigma\, s\, Z$, et l'on voit que la notion de l'aire étant ainsi ramenée à celle de volume, il est établi et nous n'avons plus à démontrer que la somme des éléments plans a une limite déterminée et indépendante du mode de décomposition de la courbe ABC.

La somme $\Sigma\, s z$ dont nous avons trouvé l'origine dans la définition des volumes constitue un nouvel élément du calcul, analogue aux intégrales définies qui représentent l'aire des courbes planes mais d'une nature plus complexe. Nous allons en tirer la notion analytique des intégrales doubles, et montrer comment elles s'obtiennent au moyen de deux intégrales effectuées successivement.

Soit $F(x,y)=0$, l'équation de la base du cylindre dont le volume est donné par l'expression :

$$V = \Sigma\, s z$$

et $z = f(x,y)$ l'équation de la surface qui lui sert de limite.

Nous admettrons que la courbe $F(x,y)=0$ (fig. 16) soit telle qu'à une abcisse quelconque $x = OA$ ne correspondent que deux ordonnées $y = AB$, $y_1 = AC$. Cela étant, considérons les deux parallèles AC et A'C' à la distance $AA' = dx$; je choisirai pour aires élémentaires parmi tous les modes de décomposition en segments de la base du cylindre les rectangles obtenus par une suite de perpendiculaires à ces droites, équidistantes de dy, depuis le point B, jusqu'au point le plus rapproché de C, en observant qu'on peut ainsi ajouter à l'aire de la base et en exclure une partie du rectangle $dx\,dy$. Je supposerai aussi que les ordonnées correspondantes de la surface soient menées à l'un des sommets de ces rectangles ; ces ordonnées seront ainsi les quantités :

$$f(x,y), \quad f(x, y+dy), \; f(x, y+2\,dy), \ldots\ldots$$

On aura donc, pour la somme partielle des quantités $s z$, l'expression suivante :

$$dx\, \Sigma f(x, y + i\,dy) \quad (i = 0, 1, 2, \ldots\ldots)$$

et par conséquent pour dy infiniment petit, l'intégrale définie:

$$dx \int_{AB}^{AC} f(x, y)\, dy$$

où la variable x est traitée comme une constante.

Suppososons maintenant qu'en résolvant l'équation $F(x, y) = 0$, on en tire, $y = \varphi(x)$, $y_1 = \psi(x)$, et soit:

$$\Theta(x) = \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y)\, dy.$$

La somme de tous les éléments $s z$, sera la nouvelle intégrale:

$$\int_a^b \Theta(x)\, dx$$

en désignant par a et b les valeurs extrêmes de x, c'est-à-dire les abscisses des points où la tangente à la courbe est parallèle à l'axe des ordonnées. Les quantités infiniment petites, ajoutées ou retranchées, ont évidemment pour limite supérieure une bande rectangulaire obtenue en plaçant bout à bout les rectangles $dx\, dy$, sur une droite égale à deux fois la projection de la courbe sur l'axe Ox, et forment une somme négligeable. Nous pouvons donc écrire:

$$V = \int_a^b \Theta(x)\, dx = \int_a^b dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y)\, dy$$

et cette expression sera désormais ce que nous appellerons l'intégrale double de la fonction de deux variables $f(x, y)$, par rapport à la courbe $F(x, y) = 0$.

Il est d'une grande importance de se familiariser avec ce nouvel élément du calcul qui a son rôle propre en analyse, en présentant avec les intégrales définies simples, des analogies et des différences essentielles. Les analogies résultent de la ressemblance entre les définitions de l'aire des courbes planes et du volume des cylindres. Les différences proviennent surtout du rôle que joue dans le calcul d'une intégrale double, la condition $F(x, y) = 0$ qui sert à la limitation des variables. Ainsi on a comme conséquence immédiate des définitions les formules semblables:

$$\int_{x_0}^{X} f(x)\, dx = (X - x_0) f(\xi),$$

la quantité ξ étant comprise entre x_0 et X, puis en désignant encore par S l'aire de la base du cylindre:

$$\iint f(x, y)\, dx\, dy = S f(\xi, \eta),$$

où ξ et η sont les coordonnées d'un point situé à l'intérieur de la courbe $F(x, y) = 0$. Le plus souvent pour abréger l'écriture, on écrit ainsi, comme nous venons de le faire.

$$\iint f(x, y)\, dx\, dy$$

au lieu de l'expression entière explicite:

$$\int_a^b dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y)\, dy,$$

en se bornant à ajouter que l'intégrale double se rapporte à une courbe donnée. J'ajoute

que dans le cas particulier d'une fonction linéaire.

$$f(x, y) = A + Bx + Cy,$$

les ordonnées ξ et η prennent une signification remarquable que nous devons mentionner. Le volume étant alors :

$$V = A \iint dx\,dy + B \iint x\,dx\,dy + C \iint y\,dx\,dy,$$

on voit que la première intégrale $\iint dx\,dy$ est l'aire S, les deux autres donnent ensuite ces relations :

$$\iint x\,dx\,dy = S\xi, \qquad \iint y\,dx\,dy = S\eta,$$

où ξ et η sont les coordonnées du centre de gravité de l'aire de la base. Nous avons donc l'expression suivante :

$$V = S(A + B\xi + C\eta)$$

ou encore :

$$V = S\zeta,$$

en introduisant l'ordonnée ζ du plan qui sert de limite au volume du cylindre.

Les applications géométriques que nous allons exposer nous donneront maintenant des exemples du calcul d'intégrales doubles ; nous les ferons précéder d'une remarque concernant la détermination d'un volume limité par une surface fermée $F(x, y, z) = 0$. Je supposerai qu'à un système des variables x et y, ne correspondent que deux valeurs de z ; cela étant on envisagera le cylindre circonscrit à cette surface parallèlement à l'axe Oz, et la différence des deux volumes qui se rapportent à la plus grande et à la plus petite des valeurs de z, donnera le résultat cherché. Or la trace du cylindre circonscrit sur le plan des xy, s'obtient, comme on sait, en éliminant z entre les équations :

$$F(x, y, z) = 0 \qquad \frac{dF}{dz} = 0,$$

et il faudra ensuite déterminer les valeurs limites de x, qui donnent les points où la tangente à cette courbe est parallèle à l'axe Oy. On y parvient d'une manière simple, si l'on remarque qu'aux points correspondants de la surface, le plan tangent est perpendiculaire à l'axe Ox ; d'où ces trois équations :

$$F(x, y, z) = 0, \qquad \frac{dF}{dz} = 0, \qquad \frac{dF}{dy} = 0.$$

Nous aurons donc, en éliminant y et z, l'équation en x dont dépendent les valeurs cherchées.

Cette considération de la différence des volumes de deux cylindres n'est pas toujours nécessaire ; on va le voir dans la première application que nous allons donner, qui concerne l'ellipsoïde à trois axes inégaux, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$. On peut se borner, en effet, à évaluer la portion comprise dans l'angle des coordonnées positives qui est le huitième du volume total. L'équation de la trace de la surface sur le plan des xy étant l'ellipse :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

les fonctions qui ont été précédemment représentées par $y = \varphi(x)$, $y_1 = \psi(x)$, sont l'axe

des abcisses $y=0$, et l'ordonnée de cette ellipse: $y_1 = \frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$. Nous aurons ainsi pour la quantité désignée par $\Theta(x)$ l'intégrale:

$$\Theta(x) = \int_0^{y_1} c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\,dy,$$

ou plutôt:

$$\Theta(x) = \frac{c}{b}\int_0^{y_1}\sqrt{y_1^2-y^2}\,dy.$$

Or, on obtient immédiatement:

$$\Theta(x) = \frac{\pi}{4}\ \frac{cy_1^2}{b},$$

et il ne reste plus qu'à intégrer cette expression entre les valeurs extrêmes de la variable $x=0$, $x=a$, ce qui donne:

$$\int_0^a \Theta(x = \frac{\pi bc}{4}\int_0^a \left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)dx$$

$$= \frac{\pi abc}{6},$$

et, par suite, pour le volume de l'ellipsoïde:

$$V = \frac{4\pi abc}{3}.$$

Un calcul tout semblable au précédent s'offre dans les applications suivantes:

Soit proposé d'abord d'obtenir le volume V d'un corps de révolution, engendré par la courbe $y=f(x)$ tournant autour de l'axe des abcisses et compris entre les plans $x=\alpha$, $x=b$, perpendiculaires à cet axe.

L'équation de la surface de révolution est:

$$\sqrt{y^2+z^2} = f(x),$$

ou bien:

$$y^2+z^2-f^2(x) = 0.$$

Considérons la portion située au-dessus du plan des xy, dont le volume est $\frac{V}{2}$; je remarque que la trace de la surface sur ce plan, est donnée par l'équation:

$$y^2-f^2(x) = 0,$$

de sorte que les fonctions $\varphi(x)$ et $\psi(x)$ sont actuellement: $-f(x)$ et $+f(x)$. La formule générale devient donc en écrivant, pour abréger, f au lieu de $f(x)$:

$$\frac{V}{2} = \int_a^b dx\int_{-f}^{+f}\sqrt{f^2-y^2}\,dy;$$

et comme on a:

$$\int_{-f}^{+f}\sqrt{f^2-y^2}\,dy = \frac{\pi f^2}{2},$$

on en conclut immédiatement:

$$V = \pi\int_a^b f^2(x)\,dx.$$

Nous chercherons, en second lieu, l'aire des surfaces de révolution, et nous formerons à cet effet l'expression : $1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2$, ou plus simplement $1+p^2+q^2$. On a d'abord :

$$p=\frac{ff'}{z}, \qquad q=-\frac{y}{z},$$

et par conséquent :

$$1+p^2+q^2=\frac{z^2+y^2+f^2f'^2}{z^2}=\frac{(1+f'^2)f^2}{z^2}.$$

La portion de la surface S, située au-dessus du plan des xy a donc pour valeur :

$$\frac{S}{2}=\int_a^b dx\int_{-f}^{+f}\sqrt{1+f'^2}\,\frac{f\,dy}{\sqrt{f^2-y^2}}$$

et la formule :

$$\int_{-f}^{+f}\frac{f\,dy}{\sqrt{f^2-y^2}}=\pi$$

donne immédiatement le résultat cherché :

$$S=2\pi\int_a^b\sqrt{1+f'^2}\,f\,dx.$$

On remarquera qu'en introduisant l'arc σ de la courbe méridienne $y=f(x)$, on peut écrire sous une forme plus simple :

$$S=2\pi\int_a^b y\,d\sigma$$

Soit, comme exemple, l'ellipse :

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$$

la formule déjà obtenue

$$d\sigma=\frac{b\sqrt{a^4-c^2x^2}}{a^2y}\,dx,$$

nous donne :

$$y\,d\sigma=\frac{b\sqrt{a^4-c^2x^2}}{a^2}\,dx$$

Supposons, en premier lieu $a>b$, de sorte que l'ellipsoïde ait été engendré par l'ellipse tournant autour de son grand axe, la constante c sera réelle, plus petite que a, on est ainsi ramené à la quadrature de l'ellipse, en écrivant :

$$S=\frac{2\pi bc}{a^2}\int\sqrt{\left(\frac{a^2}{c}\right)^2-x^2}\,dx$$

ce qui donne immédiatement

$$S=\frac{\pi bx}{a^2}\sqrt{a^4-c^2x^2}+\frac{2\pi a^2b}{c}\arcsin\frac{cx}{a^2},$$

en faisant commencer l'aire à partir de l'extrémité du petit axe. Si l'on admet ensuite que l'ellipsoïde soit de revolution autour de son petit axe, en posant $b^2-a^2=c^2$, d'où cette nouvelle expression :

$$S=\frac{2\pi b}{a^2}\int\sqrt{a^4c^2x^2}\,dx$$
$$=\frac{2\pi bc}{a^2}\int\sqrt{\left(\frac{a^2}{c}\right)^2+x^2}\,dx$$

Elle s'est rencontrée pour la rectification de la parabole; la surface de l'ellipsoïde allongé, comptée encore à partir de $x=0$, est donc:

$$S = \frac{\pi b x}{a^2}\sqrt{a^4+c^2x^2}+\frac{\pi a^2 b}{c}\log\frac{cx+\sqrt{a^4+c^2x^2}}{a^2}$$

Je me proposerai enfin, et comme dernière application géométrique, d'obtenir le volume compris entre la surface de l'hyperboloïde à deux nappes:

$$yz+y^2-x^2-a^2=0$$

et les trois plans:

$$y=0, \qquad z=0, \qquad y=2x.$$

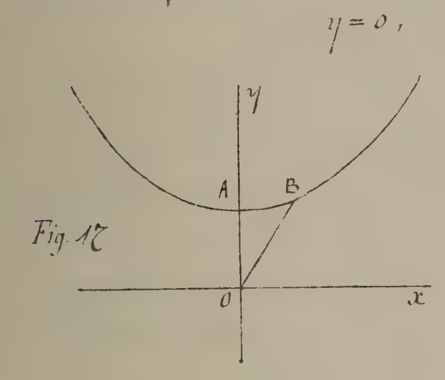


Fig. 17

Construisons (fig 17) la branche supérieure de l'hyperbole $y^2-x^2-a^2=0$, qui est la trace de la surface sur le plan des xy, et la droite $y=2x$. Soit A le sommet de la courbe, B le point où elle rencontre cette droite; les variables x et y se trouveront limitées par la condition de représenter les points du secteur A O B. Il faut donc intégrer par rapport à y, la fonction $z=\frac{a^2+x^2-y^2}{y}$, en prenant pour limite inférieure l'ordonnée de la droite OB $y=2x$, et pour limite supérieure l'ordonnée de l'hyperbole AB, $y_1=\sqrt{x^2+a^2}$. Nous obtenons ainsi la quantité:

$$\Theta(x)=\int_y^{y_1}\frac{a^2+x^2-y^2}{y}dy=(x^2+a^2)\log\frac{y_1}{y}-\frac{1}{2}(y_1^2-y^2);$$

c'est-à-dire:

$$\Theta(x)=(x^2+a^2)\log\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{2x}+\frac{1}{2}(3x^2-a^2),$$

qui doit ensuite être intégrée, depuis l'origine $x=0$, jusqu'à l'abscisse du point B, $x=\frac{a}{\sqrt{3}}$.

Remplaçons le facteur x^2+a^2 par $D_x\left(\frac{x^3}{3}+a^2x\right)$ une intégration par parties donne facilement l'expression suivante:

$$\int\Theta(x)dx=\left(\frac{x^3}{3}+a^2x\right)\log\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{2x}+\frac{x(3x^2-a^2)}{2}+\frac{2}{3}\int\frac{a^4dx}{x^2+a^2}$$

Observons maintenant que le produit $x\log x$ s'annule pour $x=0$, de sorte que le terme logarithmique et la partie algébrique s'évanouissent à la limite inférieure et à la limite supérieure, $x=\frac{a}{\sqrt{3}}$, on parvient donc à ce résultat fort simple:

$$\int_0^{\frac{a}{\sqrt{3}}}\Theta(x)\,dx=\frac{2}{3}\int_0^{\frac{a}{\sqrt{3}}}\frac{a^4dx}{x^2+a^2},$$

cela étant il suffit de faire dans l'intégrale du second membre $x=a\xi$ et d'observer qu'on a, $\operatorname{arc}\operatorname{tg}\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\pi}{6}$, pour en conclure la valeur cherchée.

$$V=\frac{2a^3}{3}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}}\frac{d\xi}{\xi^2+1}=\frac{\pi a^3}{9}$$

Après avoir commencé l'étude des intégrales doubles en traitant d'applications géométriques

nous poursuivrons le même sujet au point de vue de l'analyse.

Nous appellerons, en premier lieu, l'attention sur un cas particulier d'une grande importance, dans lequel la nature de ces expressions se rapproche de celle des intégrales simples. Supposons que les limites de l'intégration, par rapport à la variable y, soient indépendantes de x, et représentons alors l'intégrale double par:

$$J = \int_a^{a'} dx \int_b^{b'} f(x,y)\, dy\,,$$

on remarquera qu'elle s'obtient sous forme explicite, au moyen de la fonction $\Phi(x,y)$ satisfaisant à la condition:

$$f(xy) = D^2_{xy}\, \Phi(x,y).$$

On a, en effet, l'expression:

$$J = \Phi(a',b') + \Phi(a,b) - \Phi(a',b) - \Phi(a,b'),$$

dont les termes sont les valeurs que prend la fonction $\Phi(x,y)$ aux sommets du rectangle, par rapport auquel est effectuée l'intégrale double.

Fig. 18

Désignons les coordonnées des points A, B, C, D par (a,b), (a',b); (a',b'), (a,b') et soit pour abréger: $A = \Phi(a,b)$, $B = \Phi(a',b)$, etc, la relation précédente s'écrit ainsi:

$$J = (A) - (B) + (C) - (D),$$

et on remarque que les signes alternatifs se rapportent aux sommets du rectangle lorsqu'on le décrit à partir du sommet A en ayant à sa droite l'espace illimité.

Il en est de même aussi dans le cas tout spécial, où l'on suppose:

$$f(x,y) = \varphi(x)\, \psi(y);$$

il est clair que nous aurons alors:

$$\int_b^{b'} f(x,y)\, dy = \varphi(x) \int_b^{b'} \psi(y)\, dy;$$

l'intégrale double est donc le produit de deux intégrales simples:

$$J = \int_a^{a'} \varphi(x) \times \int_b^{b'} \psi(y)\, dy;$$

Soit par exemple,

$$f(x,y) = [\varphi(x) - \varphi(y)][\psi(x) - \psi(y)];$$

nous obtenons ainsi la relation:

$$\int_a^{a'}\int_a^{a'} [\varphi(x - \varphi(y)][\psi(x) - \psi(y)]\, dx\, dy = 2\left[(a'-a)\int_a^{a'} \varphi(x)\psi(x)\, dx - \int_a^{a'} \varphi(x)\, dx \int_a^{a'} \psi(x)\, dx\right],$$

dont j'indiquerai une importante conséquence.

Supposons que a' étant supérieur à a, les fonctions $\varphi(x)$ et $\psi(x)$ soient en même temps croissantes ou décroissantes, lorsque la variable parcourt l'intervalle compris entre a et a'. Dans le premier cas, par exemple, les différences $\varphi(x) - \varphi(y)$ et $\psi(x) - \psi(y)$ seront

positives pour $x > y$; négatives pour $x < y$, et restent par conséquent de même signe. Il en sera de même dans le second cas ; l'intégrale double est donc toujours positive, et l'on aura la relation :

$$(a'-a)\int_a^{a'}\varphi(x)\,\psi(x)\,dx > \int_a^{a'}\varphi(x)\,dx\int_a^{a'}\psi(x)\,dx.$$

Admettons ensuite que l'une des fonctions soit croissante avec la variable, dans le même intervalle, et l'autre décroissante, les différences $\varphi(x)-\varphi(y)$, $\psi(x)-\psi(y)$, seront de signes contraires, l'intégrale double est négative, nous obtenons alors :

$$(a'-a)\int_a^{a'}\varphi(x)\,\psi(x)\,dx < \int_a^{a'}\varphi(x)\,dx\int_a^{a'}\psi(x)\,dx.$$

C'est à M. Tchebicheff que sont dues ces propositions remarquables sur les intégrales définies ; la démonstration si facile que nous venons d'exposer a été donné par M. F. Francklin, dans un article de l'American Journal of Mathématics, vol. VII, p 77, auquel nous renvoyons pour l'étude de nombreuses et importantes applications que le savant auteur a faites, en particulier, aux intégrales elliptiques.

Nous allons maintenant aborder la question de l'élévation par approximation de l'intégrale double.

$$J = \int_a^{a+h}dx\int_b^{b+k}f(x,y)\,dy,$$

lorsqu'elle ne peut être obtenue sous forme explicite, au moyen d'un développement en série suivant les puissances croissantes de h et k.

Nous admettrons que la fonction $f(x,y)$ soit développable en série convergente ordonnée suivant les puissances croissantes de $x-a$ et $y-b$, par la formule de Taylor dans le cas de deux variables, et nous poserons :

$$f(x,y) = f(a,b) + \frac{x-a}{1}\,\frac{df(a,b)}{da} + \frac{y-b}{1}\,\frac{df(a,b)}{db} + \ldots\ldots$$

le terme général de cette série étant :

$$\frac{(x-a)^m}{1,2\,\ldots\ldots m}\cdot\frac{(y-b)^n}{1,2\,\ldots\ldots n}\cdot\frac{d^{m+n}f}{da^m\,db^n}.$$

On est ainsi ramené à une somme d'intégrales de la forme :

$$\int_a^{a+h}dx\int_b^{b+k}\frac{(x-a)^m}{1,2\,\ldots\ldots m}\,\frac{(y-b)^n}{1,2\,\ldots\ldots m}\,\frac{d^{m+n}f}{da^m\,db^n}\,dy,$$

qui se calculent facilement parce que le double signe d'intégration porte sur le produit d'une fonction de x par une fonction de y, et l'on obtient la formule :

$$J = \Sigma\,\frac{h^{m+1}\,k^{m+1}}{1,2\ldots\ldots(m+1).1,2\ldots\ldots(n+1)}\;\frac{d^{m+n}f(a,b)}{da^m\,db^n}$$

où les nombres entiers m et n prennent toutes les valeurs de zéro à l'infini.

En nous bornant aux trois premiers termes seulement, nous avons :

$$J = hk.f(a,b) + \frac{h^2 k}{2} \frac{df}{da} + \frac{hk^2}{2} \frac{df}{db}$$

$$= hk \left[f(a,b) + \frac{h}{2} \frac{df}{da} + \frac{k}{2} \frac{df}{db} \right],$$

et l'on peut remarquer que l'intégrale double J est égale, aux termes près du quatrième ordre en h et k, à la quantité $h\,k\,f\left(a+\frac{h}{2},\ b+\frac{k}{2}\right)$. C'est un résultat que l'on applique dans beaucoup de circonstances.

Si les quantités h et k sont trop grandes pour que l'on ait des développements suffisamment convergents, on partage l'intégrale en plusieurs autres, et l'on applique la formule à chacune d'elles ; ce qui revient géométriquement à diviser le rectangle total dans les limites duquel on prend l'intégrale double, en plusieurs autres rectangles plus petits.

Ces procédés pour le calcul approché des intégrales doubles dont on fait usage dans la pratique, sont analogues à ceux qu'on emploie pour les intégrales simples, mais le rapprochement que nous voulons établir entre les deux genres de quantité sera plus complètement justifié par la remarque suivante.

Je rappelle à cet effet la formule d'approximation que Gauss a donnée pour l'intégrale simple.

$$J = \int_a^{a+h} f(x)\,dx$$

Soit
$$F(t) = \frac{D_t^\mu \left[t^\mu (t-1)^\mu \right]}{1.2\ldots\ldots\mu}$$

désignons par $t_1, t_2, \ldots\ldots t_\mu$ les racines de l'équation $F(t)=0$, qui sont toutes réelles et comprises entre zéro et l'unité, soit ainsi :

$$T_i = \frac{1}{(t_i - t_i^2)\,F'^2(t_i)}$$

on aura :

$$J = h\left[T_1 f(a+ht_1) + T_2 f(a+ht_2) + \cdots\cdots + T_\mu f(a+ht_\mu)\right];$$

ou pour abréger :

$$J = h\,\Sigma\left[T_i f(a+ht_i)\right]$$

Considérant ensuite les intégrales doubles en faisant :

$$J = \int_a^{a+h} dx \int_b^{b+k} f(x,y)\,dy,$$

nous allons établir la formule semblable :

$$J = hk\,\Sigma\left[T_i T_j f(a+ht_i,\ b+kt_j)\right]$$

$$i = 1, 2, \ldots\ldots\ldots \mu,$$

$$j = 1, 2, \ldots\ldots\ldots \mu.$$

Développons, en effet, cette expression suivant les expressions croissantes de

h et k; on trouve pour le coefficient de $h^{m+1}k^{n+1}$, la quantité :

$$\frac{1}{1,2,\ldots\ldots m\;1,2,\ldots\ldots n}\;\frac{d^{m+n}f(a,b)}{da^m\,db^n}\Sigma\left[T_i T_j t_i^m t_j^n\right].$$

Or, on a la relation suivante sur laquelle repose la formule de Gauss et que j'admets ici, à savoir :

$$\sum_1^\mu{}_i\left[T_i\, t_i^m\right]=\frac{1}{m+1},$$

l'entier m étant l'un des nombres de la suite, $0,1,2,\ldots\ldots\ldots 2\mu-1$.

Multiplions membre à membre cette équation avec l'équation semblable :

$$\sum_1^\mu{}_j\left[T_j\, t_j^n\right]=\frac{1}{n+1},$$

on obtiendra ainsi :

$$\Sigma\left[T_i\,T_j\,t_i^m t_j^n\right]=\frac{1}{(m+1)(n+1)}$$

$$i=1,2,\ldots\ldots\mu,$$

$$j=1,2,\ldots\ldots\mu.$$

Nous voyons donc que dans le développement considéré, le coefficient de $h^{m+1}k^{n+1}$ devient simplement :
$$\frac{1}{1,2,\ldots\ldots m+1.\;1,2,\ldots\ldots n+1}\;\frac{d^{m+n}f(a,b)}{da^m\,db^n},$$
lorsque m et n sont compris dans la suite $0,1,2,\ldots\ldots 2\mu-1$.

Or on est parvenu tout-à-l'heure pour l'intégrale double à la série :

$$J=\Sigma\,\frac{h^{m+1}k^{n+1}}{1,2,\ldots\ldots m+1.\;1,2,\ldots\ldots n+1}\;\frac{d^{m+n}f(a,b)}{da^m\,db^n}$$

par conséquent, la formule d'approximation, qui est l'extension de celle de Gauss, représente cette intégrale aux termes près de l'ordre $2\mu+1$ en h et en k ; elle en donnerait la valeur exacte en supposant la fonction $f(x,y)$ un polynome entier en x et y, de degré non supérieur à 2μ par rapport à chacune des variables.

Soit par exemple, $\mu=1$, on trouvera comme plus haut.

$$J=hk\,f\left(a+\frac{h}{2},\;b+\frac{k}{2}\right).$$

Supposons ensuite $\mu=2$, ce qui donne : $F(t)=6t^2-6t+1$, d'où : $t_1=\dfrac{3+\sqrt3}{6}$, $t_2=\dfrac{3-\sqrt3}{6}$ puis $T_1=\frac{1}{2}$, $T_2=\frac{1}{2}$, nous obtiendrons cette expression fort simple.

$$J=\frac{hk}{4}\left[f\left(a+\frac{3+\sqrt3}{6}h,\;b+\frac{3+\sqrt3}{6}k\right)+f\left(a+\frac{3-\sqrt3}{6}h,\;b+\frac{3+\sqrt3}{2}k\right)\right.$$
$$\left.+f\left(a+\frac{3-\sqrt3}{6}h,\;b+\frac{3-\sqrt3}{6}k\right)+f\left(a+\frac{3+\sqrt3}{6}h,\;b+\frac{3-\sqrt3}{6}k\right)\right]$$

J'indiquerai enfin un résultat relatif à l'approximation des intégrales de la forme :

$$J=\int_{-1}^{+1}dx\int_{-1}^{+1}\frac{f(x,y)}{\sqrt{1-x^2}\,\sqrt{1-y^2}}\,dy,$$

où l'on suppose : $f(x, y) = \Sigma A_{m,n} x^m y^n$, et qui se tire de la formule bien connue concernant l'intégrale simple $\int_{-1}^{+1} \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx$.

Soit d'abord : $x = \cos\varphi$, $y = \cos\psi$, et faisons pour abréger :

$$f(\cos\varphi, \cos\psi) = F(\varphi, \psi),$$

ce qui donne :

$$J = \int_0^\pi d\varphi \int_0^\pi F(\varphi, \psi)\, d\psi ;$$

La somme suivante :

$$\left(\frac{\pi}{\mu}\right)^2 \Sigma F\left[\frac{(2i-1)\pi}{2\mu}, \frac{(2j-1)\pi}{2\mu}\right],$$

où les entiers i et j prennent les valeurs $1, 2, \ldots\ldots \mu$, représente l'intégrale proposée, en négligeant seulement, comme tout à l'heure, les termes d'ordre $2\mu + 1$ en x et en y, dans la fonction $f(x, y)$.

Nous allons revenir aux considérations générales, et envisager les cas où le double signe d'intégration porte sur une dérivée partielle par rapport à l'une des variables, et en premier lieu nous nous occuperons de l'expression suivante :

$$J = \int dx \int D_y f(x, y)\, dy,$$

l'intégrale double se rapportant toujours à la courbe fermée $F(x, y) = 0$.

En suivant les principes exposés précédemment, nous résoudrons cette équation par rapport à y, et nous supposerons qu'on en tire ces deux fonctions de x, à savoir :

$$y_0 = \varphi(x), \qquad y_1 = \psi(x).$$

On aura donc l'expression :

$$J = \int_a^b dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} D_y f(x, y)\, dy,$$

qui en effectuant l'intégration par rapport à y, prend la forme suivante :

$$J = \int_a^b [f(x, y_1)\, dx - \int_a^b f(x, y_0)]\, dx.$$

Nous voyons ainsi s'offrir pour la valeur de l'intégrale double des intégrales simples de fonctions composées de deux autres, cette circonstance va nous donner une notion analytique nouvelle, que nous allons exposer, en suivant les considérations employées par M. Karl Neumann dans son ouvrage intitulé : Théorie des fonctions abéliennes d'après Riemann.

Nous nommerons, en général, intégrale curviligne l'expression $\int_{t_0}^{t_1} f(x, y)\, dt$, $f(x, y)$ désignant une fonction quelconque de x et y, lorsque ces quantités sont données en fonction de la variable t, par les formules : $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$.

Fig. 19

Supposons qu'on ait tracé la courbe représentée par les équations $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, et soit AMB l'arc obtenu, quand t croît de t_0 à t_1.

On voit que l'intégrale est la somme des valeurs de la fonction $f(x,y)\,dt$, x et y étant les coordonnées de la suite des points de cet arc de courbe, lorsque nous faisons croître t de t_0 à t_1, par degrés égaux à dt. Elle se rapporte donc à l'arc AMB, ce qui justifie la dénomination d'intégrale curviligne, et la manière dont on la représente ;

$$\int_{t_0}^{t_1} f(x,y)\,dt = (AMB).$$

Nous ferons sur cette formule une première remarque très simple, mais d'une grande importance.

On a évidemment :

$$\int_{t_1}^{t_0} f(x,y)\,dt = (BMA),$$

la disposition des lettres indiquant le sens dans lequel est parcouru l'arc de courbe.

D'ailleurs :

$$\int_{t_0}^{t_1} f(x,y)\,dt + \int_{t_1}^{t_0} f(x,y)\,dt = 0,$$

et la relation qui en résulte, à savoir :

$$(AMB) + (BMA) = 0$$

montre que les intégrales curvilignes relatives à un même chemin parcouru successivement dans un certain sens, puis en sens opposé, sont égales et de signe contraire.

Appliquons ces notions à l'intégrale qui s'est offerte plus haut.

$$J = \int_a^b f(x,y_1)\,dx - \int_a^b f(x,y_0)\,dx$$

Fig. 20

L'équation $F(x,y)=0$ représentant la courbe GMHM', on a évidemment.

$$J = (GMH) - (GM'H),$$

ou d'après la remarque précédente :

$$J = (GMH) + (HM'G).$$

J est donc simplement l'intégrale curviligne relative au contour total de la courbe $F(x,y)=0$, décrite entièrement, une seule fois, et de façon à avoir l'espace illimité à gauche. Nous avons par suite, pour l'expression de J une intégrale curviligne, qui se rapporte au contour total de la courbe $F(x,y)=0$. L'avantage que nous procure cette nouvelle notion des intégrales curvilignes consiste donc en ce que l'intégrale double s'exprime à l'aide d'un seul terme au lieu de deux.

Considérons maintenant le cas où la fonction placée sous le signe d'intégration est une dérivée partielle par rapport à x. Alors le volume considéré est donné par l'expression :

$$J = \int_\alpha^\beta dy \int_{x_0}^{x_1} D_x f(x,y)\,dx,$$

où $y=\alpha$, $y=\beta$ sont les deux tangentes à la base du cylindre $F(x,y)=0$ parallèles à Ox, en désignant par x_0 et x_1 les fonctions de y qui représentent les deux valeurs de l'abscisse

pour une même valeur de l'ordonnée.

Fig. 21

Ceci posé, la considération de la figure nous montre immédiatement que l'on a :

$$J = \int_\alpha^\beta f(x_1, y)\,dy - \int_\alpha^\beta f(x_0, y)\,dy$$
$$= (GP'H) - (GPH)$$
$$= (GP'H) + (HPG).$$

Mais maintenant la base du cylindre est décrite de manière que l'espace illimité soit à droite, tandis que précédemment, quand la fonction sous le signe d'intégration était de la forme $D_y f(x, y)$, l'espace illimité était à gauche.

Ces considérations fort simples auront bientôt d'importantes applications.

6ème Leçon.

Avant d'aborder la notion des intégrales prises entre des limites imaginaires, nous allons rappeler succinctement quelques uns des résultats auxquels conduit la théorie des quantités imaginaires en Algèbre.

Ces résultats sont la conséquence de la représentation géométrique de la quantité $z = x + iy$, au moyen du point d'un plan dont l'abscisse est x et l'ordonnée y, les axes étant rectangulaires. On voit ainsi qu'à une suite de telles quantités correspond une suite de points, de sorte qu'une loi quelconque de succession de valeurs imaginaires d'une variable, sera figurée par une courbe. Cela étant, soit $u = f(z)$, et supposons qu'en faisant $z = x + iy$, on ait : $u = X + iY$, nous appliquerons le même mode de représentation à u et à la variable indépendante ; à un lieu, à une ligne quelconque déterminant la loi de succession des valeurs de z, répondra donc une autre ligne donnant la loi de succession des valeurs de la fonction. Cette seconde courbe est appelée par Gauss l'image de la première.

Fig. 22

On peut, d'ailleurs, aussi dans la représentation de la quantité $z = x + iy$, au lieu des coordonnées rectangulaires employer des coordonnées polaires ρ et ω, en faisant $x = \rho\cos\omega$, $y = \rho\sin\omega$, ρ étant la distance oz toujours prise positivement, et ω l'angle zox. Alors on nomme ρ le module, l'angle ω l'argument de z, et à l'égard de u nous poserons semblablement :

$$X = R\cos\varphi, \qquad Y = R\sin\varphi.$$

Ces principes établis, notre but est maintenant de montrer comment la dépendance

de ces éléments analytiques, ou celle de deux figures construites avec les quantités z et u, manifeste les propriétés caractéristiques les plus importantes de la fonction.

Nous commencerons cette étude par le cas le plus simple en considérant le binôme:

$$u = z - a,$$

où $a = \alpha + \beta i$; on aura donc:

$$u = (x-\alpha) + i(y-\beta)$$

ou bien:

$$= x' + iy',$$

en posant $x - \alpha = x'$, $y - \beta = y'$.

Fig. 23

Soient A et M les points qui représentent les quantités a et z. Traçons en A deux droites Ax', Ay' parallèles aux axes Ox et Oy. Les formules précédentes nous montrent que le point M représente $z - a$, si l'on prend pour axes les deux droites Ax', Ay'; en faisant:

$$u = R(\cos\varphi + i \sin\varphi)$$

on a par conséquent:

$$MA = R \qquad MAx' = \varphi.$$

Ceci posé, admettons en premier lieu que le point M décrive un cercle dont le centre est en O; le module ρ de z étant constant, nous ferons croître son argument ω d'une manière continue depuis une valeur initiale ω_0 jusqu'à la valeur $\omega_0 + 2\pi$.

Fig. 24

La figure montre alors immédiatement que si le point A est à l'intérieur du cercle, l'argument φ de u augmente de 2π en même temps que ω, si le point A est à l'extérieur du cercle décrit par le point M quand ω croît de ω_0 à $\omega_0 + 2\pi$, l'angle φ varie tour-à-tour en décroissant et en augmentant, mais reste compris entre deux limites fixes, et finit par reprendre sa valeur primitive.

Fig. 25

Ces résultats peuvent aussi être obtenus par le calcul, en partant de l'expression de $\tang\varphi$ en fonction de ω, mais c'est la géométrie qui permet de les étendre au cas général où le point M, représentant la variable z, décrit, au lieu d'une circonférence, une courbe fermée quelconque.

Fig. 26

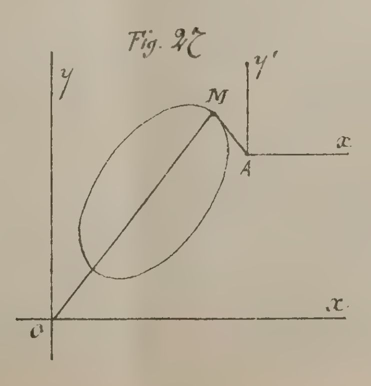


Fig. 27

Ainsi la figure 26 montre, lorsque le point A est intérieur à cette courbe, que l'argument: $\varphi = MAx'$ sera devenu $\varphi + 2\pi$, lorsqu'elle aura été parcourue en entier.

et une seule fois, l'espace illimité étant à droite.

La figure 27 fait voir ensuite que dans le cas du point extérieur, cet angle reprend sa valeur initiale.

Considérons maintenant le module et l'argument du produit d'un nombre quelconque de facteurs binômes :

$$u = (z-a)(z-b)\ldots\ldots(z-l),$$

et supposons que la variable imaginaire $z = \rho(\cos\omega + i\sin\omega)$ décrive un contour fermé quelconque S.

Si l'on fait :

$$z-a = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$
$$z-b = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$z-l = r_n(\cos\varphi_n + i\sin\varphi_n)$$

et

$$u = R(\cos\Phi + i\sin\Phi)$$

on aura :

$$R = rr_1\ldots\ldots\ldots\ldots r_n$$
$$\Phi = \varphi + \varphi_1 + \ldots\ldots\ldots + \varphi_n + 2k\pi.$$

Cela posé, lorsque la variable z partira d'un point du contour pour y revenir après l'avoir décrit entièrement et une seule fois, des divers arguments φ, fonctions continues de ω, ceux qui correspondent à des constantes, $a, b, \ldots\ldots l$, renfermées à l'intérieur de S, augmenteront de 2π, et ceux qui correspondent à des quantités placées à l'extérieur reprendront, au contraire, la même valeur. On a donc le théorème suivant :

Lorsque la variable z décrit un contour fermé, l'argument du polynôme entier

$$u = (z-a)(z-b)\ldots\ldots(z-l)$$

varie d'un multiple entier $2\mu\pi$ de la circonférence, μ étant le nombre des racines de l'équation $u=0$, qui sont contenues dans l'intérieur de ce contour.

Ce beau résultat a été découvert par Cauchy, nous le retrouverons bientôt ainsi que le théorème célèbre par lequel se détermine le nombre des racines des équations algébriques qui sont à l'intérieur d'une courbe unicursale, et en suivant la voie même qui y a conduit le grand géomètre. Nous nous proposons maintenant d'en faire l'application à l'étude de la fonction irrationnelle définie par l'équation :

$$u^2 = F(z) = (z-a)(z-b)\ldots\ldots(z-l).$$

Soit, à cet effet, comme plus haut, S la courbe décrite par la variable z, et posons :

$$F(z) = R(\cos\Phi + i\sin\Phi).$$

La racine $u = +\sqrt{F(z)}$ s'obtient immédiatement sous la forme : $\sqrt{R}(\cos\frac{1}{2}\Phi + i\sin\frac{1}{2}\Phi)$, et les équations

$$X = \sqrt{R}\cos\tfrac{1}{2}\Phi, \qquad Y = \sqrt{R}\sin\tfrac{1}{2}\Phi,$$

nous permettront de construire l'image de cette courbe S.

Supposons donc qu'au point de départ on ait : $\Phi = \Phi_0$; lorsqu'elle est décrite en entier et une seule fois, l'argument Φ parvient, comme nous l'avons vu,

en variant d'une manière continue, à la valeur $\Phi_0 + 2\mu\pi$. Alors on voit que μ étant un nombre impair, les coordonnées X et Y ne reprennent point leurs valeurs initiales, de sorte que le lieu géométrique relatif à u n'est point une courbe fermée; et qu'il l'est au contraire si μ est supposé un nombre pair.

Ce que l'on vient d'établir à l'égard de la racine $u = \sqrt{F(z)}$ a lieu également pour la seconde racine $u = -\sqrt{F(z)}$, et si l'on construit en même temps les deux courbes figurant la loi de succession de ces quantités, on conclut que, dans le premier cas, le point de départ de l'une d'entre elles coïncidant avec le point d'arrivée de l'autre, on obtient, en construisant le double système de points, non pas deux courbes qui, l'une et l'autre, soient interrompues et s'arrêtent brusquement, mais une courbe fermée unique. Dans le second cas, au contraire, chacune des racines reprenant sa valeur initiale, la construction effectuée donne pour résultat deux courbes fermées et distinctes. On a donc ce théorème: La variable indépendante décrivant un contour fermé, le système des racines de l'équation $u^2 = F(z)$ est figuré par une seule courbe, ou par deux courbes fermées distinctes suivant qu'il y a un nombre impair ou un nombre pair de racines de l'équation $F(z) = 0$, renfermées dans l'intérieur de ce contour.

Ce qui précède nous donne une notion importante, c'est celle des fonctions uniformes ou non uniformes.

La dénomination de non uniformes sera employée à l'égard des fonctions de z, qui diffèrent ainsi des fonctions rationnelles par cette circonstance si frappante de donner lieu tantôt à des courbes fermées, tantôt à des courbes interrompues, suivant le chemin décrit à partir d'un point donné par la variable indépendante pour revenir à ce même point. On nomme, au contraire, uniformes les fonctions qui sont toujours représentées par des courbes fermées, quel que soit le contour fermé décrit par la variable.

En général, une fonction est non uniforme parce qu'il existe des points jouant un rôle analogue aux points $a, b, c, \ldots\ldots l$ que nous considérions dans le dernier exemple traité. On les a souvent appelés points critiques; Riemann les nomme points de ramification; il est aisé de comprendre la raison de cette dénomination; en effet, quand la courbe décrite par la variable passe par un de ces points, deux des valeurs de u qui correspondent à une même valeur de z deviennent égales en général, de sorte que z dépassant ce point, on peut, sans violer la loi de continuité, faire suivre à l'une des deux racines u, qui viennent de se confondre, deux chemins différents.

Comme dernier exemple, considérons la fonction u définie par l'équation:

$$e^u = z - a,$$

c'est-à-dire le logarithme de $z - a$.

Soit : $$z - a = R(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$
et $$u = X + iY.$$

On a : $$e^{X+iY} = R(\cos\varphi + i\sin\varphi),$$
d'où, en désignant par k un nombre entier :
$$X = \log R, \qquad Y = \varphi + 2k\pi.$$

En outre, nous supposons que le point z décrit une courbe fermée, par exemple un cercle dont le centre est à l'origine, de sorte qu'on ait : $z = \rho(\cos\omega + i\sin\omega)$, ρ étant constant et ω variant en croissant de ω_0 à $\omega_0 + 2\pi$.

Il résulte de ces hypothèses que l'abscisse X reste constamment comprise entre deux limites fixes qui correspondent au minimum et au maximum de R, et que cette quantité reprend la même valeur quand ω a augmenté de 2π. Quant à l'ordonnée Y, elle admet une infinité de déterminations ; nous considérerons celle qui répond à $k = 0$ par exemple. Cela étant, si le point a est compris à l'intérieur du cercle décrit par z, φ augmente de 2π en même temps que ω ; il en résulte que si la valeur initiale ω_0 de ω correspond au minimum de R, ω variant de ω_0 à $\omega + 2\pi$, on aura un arc de courbe tel que MPN pour représenter la succession des valeurs de u, MN étant égal à 2π, (Fig. 28)

Fig. 28

Faisons maintenant croître ω de $\omega_0 + 2\pi$ à $\omega_0 + 4\pi$, etc, puis varier en décroissant de ω_0 à $\omega_0 - 2\pi$, $\omega_0 - 4\pi$, etc, il suffira de transporter cet arc MPN parallèlement à Oy aux distances 2π, 4π, etc, dans un sens et dans le sens contraire. Le lieu qui se compose d'une succession d'arcs égaux est donc une espèce de sinusoïde. Il est de plus bien clair qu'en partant d'une autre détermination de u, on reproduit la même figure ; ainsi l'ensemble de ces différentes déterminations se trouve donné par une seule courbe continue. Elles naissent toutes d'une seule d'entre elles, et l'on voit qu'il est impossible de les isoler les unes des autres. Il en est tout autrement lorsque le point A est extérieur au cercle décrit par le point z. Alors, en effet, quand ω augmente de 2π, φ et par conséquent Y reprend sa valeur primitive ; on a donc pour chaque détermination de u une courbe fermée, MN, et le lieu complet se compose d'une infinité d'anneaux, tels que MN, qu'on transporte parallèlement à Oy aux distances 2π, 4π, etc, dans les deux sens. Ici les diverses déterminations de u peuvent être toutes isolées et distinguées les unes des autres (Fig. 29).

Fig. 29

Les courbes que nous venons d'obtenir jouissent, dans l'hypothèse de ρ constant, d'une propriété remarquable : leur rectification dépend de l'intégrale elliptique de première espèce.

En effet, soit : $$z = \rho(\cos\omega + \sin\omega), \qquad a = \alpha + i\beta, \qquad u = X + iY,$$
$$z_0 = \rho(\cos\omega - i\sin\omega), \qquad a_0 = \alpha - i\beta, \qquad u_0 = X - iY.$$

Nommons σ l'arc de la courbe considérée, et S l'arc de la courbe décrite par le point z ; les relations :

$$du = \frac{dz}{z-a}, \qquad du_0 = \frac{dz_0}{z_0-a_0}$$

donnent en les multipliant membre à membre :

$$d\sigma^2 = \frac{dS^2}{(z-a)(z_0-a_0)}$$

car $d\sigma^2 = dX^2 + dY^2 = du\, du_0$ et $dS^2 = dx^2 + dy^2$.

Or, on a, ρ étant supposé constant : $dS^2 = \rho^2 d\omega^2$

et par conséquent :

$$d\sigma^2 = \frac{\rho^2 d\omega^2}{(\rho\cos\omega - \alpha)^2 (\rho\sin\omega - \beta)^2}$$

Cela étant, prenons un angle ω_0 tel que :

$$\alpha\cos\omega + \beta\sin\omega = \cos(\omega + \omega_0)\sqrt{\alpha^2+\beta^2};$$

et soit pour simplifier : $\gamma = \sqrt{\alpha^2+\beta^2}$,

l'expression précédente devient :

$$d\sigma^2 = \frac{\rho^2 d\omega^2}{\rho^2 + \gamma^2 - 2\rho\gamma\cos(\omega+\omega_0)};$$

Posons maintenant : $\omega + \omega_0 = 2\varphi$

on trouvera :

$$d\sigma = \frac{2\rho\, d\varphi}{\sqrt{(\rho-\gamma)^2\cos^2\varphi + (\rho+\gamma)^2\sin^2\varphi}}$$

d'où

$$\sigma = 2\rho\int\frac{d\varphi}{\sqrt{a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi}},$$

en faisant : $a = \rho-\gamma$, $b = \rho+\gamma$.

C'est comme nous l'avons annoncé, l'intégrale elliptique de première espèce qui se présente sous la forme normale obtenue précédemment.

7ème Leçon.

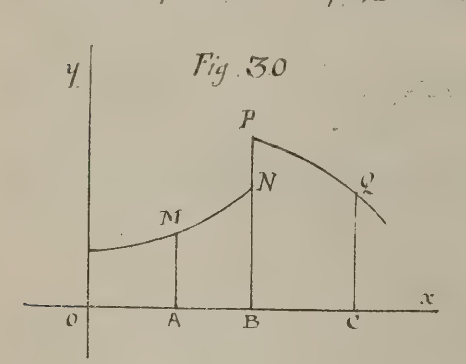
Nous allons, dans cette leçon, nous occuper des intégrales définies prises entre des limites imaginaires, et pour arriver à leur définition, nous suivrons la voie même de Cauchy, qui le premier a introduit cette nouvelle notion dans l'Analyse. C'est là une question d'une importance fondamentale comme le fera comprendre la remarque suivante.

On sait que l'intégrale $\int f(x)\,dx$ ne peut être obtenue sous forme explicite que dans un petit nombre de cas, elle représente donc une transcendante nouvelle qu'on est conduit à étudier, dès qu'il aura été établi qu'elle n'est pas exprimable par les fonctions connues de l'Analyse. Or, l'algèbre nous a montré, dans l'étude des expressions qu'elle considère, combien la considération des imaginaires est indispensable; on voit aussi comme il importe d'étendre la définition de l'intégrale, de manière qu'elle ne soit plus restreinte au seul cas des valeurs réelles pour les limites, et c'est à cet objet que répond la découverte capitale de Cauchy.

Avant de l'exposer nous reprendrons succinctement la notion de l'intégrale définie, telle que nous l'avons obtenue d'abord, en considérant les aires des courbes planes. Cette notion suppose dans l'expression $\int_a^b f(x)\,dx$ que $f(x)$ soit une fonction continue, au moins entre les limites de l'intégrale, que cette fonction soit réelle et conserve un signe constant entre a et b, le signe + par exemple, et que la limite inférieure a soit plus petite que la limite supérieure b. Cela étant, la propriété principale de l'intégrale $\int_a^b f(x)\,dx$ est d'être égale à la somme des valeurs que prend sa différentielle $f(x)$ lorsque la variable croît par degrés égaux à dx, de la limite inférieure a à limite supérieure b.

Maintenant nous allons en conservant cette propriété fondamentale nous affranchir successivement des restrictions que nous venons de rappeler et que suppose la notion de l'intégrale définie, telle qu'elle se présente à son origine.

En premier lieu je dis que la condition de continuité entre les limites de l'intégration n'est pas nécessaire. Considérons, en effet, à l'égard de deux courbes différentes: $y=f_1(x)$, $y=f_2(x)$, les segments contigus.



$$AMNB=\int_{OA}^{OB} f_1(x)\,dx, \qquad BPQC=\int_{OB}^{OC} f_2(x)\,dx.$$

L'aire formée par leur réunion peut être représentée par $\int_{OA}^{OC} f(x)\,dx$, lorsqu'on suppose $f(x)=f_1(x)$ depuis $x=OA$ jusqu'à $x=OB$, et égal ensuite à $f_2(x)$ depuis $x=OB$ jusqu'à $x=OC$; d'ailleurs, dans ce cas encore, l'intégrale $\int_{OA}^{OC} f(x)\,dx$ est égale à la somme des valeurs de $f(x)\,dx$, quand x croît par degrés égaux à dx. La notion d'intégrale définie est ainsi étendue aux fonctions qui ont une discontinuité entre les limites de l'intégration non infinie et il est évident qu'on peut en admettre un nombre quelconque.

La seconde remarque sur la notion d'intégrale définie a pour objet le cas où la fonction $f(x)$, au lieu d'être constamment positive entre les limites x_0 et x, présente plusieurs alternatives de signes, de sorte, que, par exemple, $f(x)$ ait le signe + de x_0 à x_1, le signe − de x_1 à x_2, et le signe + de x_2 à x.

On conviendra alors de poser:

$$\int_{x_0}^{x} f(x)\,dx = \int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx + \int_{x_2}^{x} f(x)\,dx,$$

et il est évident qu'en étendant de cette manière la première signification, elle restera toujours la somme des valeurs de sa différentielle, x croissant par degrés égaux à dx, de x_0 à la limite supérieure.

D'autre part, on a aussi admis que cette limite supérieure x surpassait la limite inférieure, la considération de la somme des éléments permet encore de supprimer cette restriction et on en conclut immédiatement la relation:

$$\int_{x_0}^{x} f(x)\,dx = -\int_{x}^{x_0} f(x)\,dx,$$

qui étend la notion de l'intégrale définie au cas de $x < x_0$.

Enfin, supposons $f(x)$ imaginaire et réductible à la forme $\varphi(x) + i\,\psi(x)$ où les fonctions φ et ψ sont réelles; d'après les conventions connues dans le calcul des imaginaires, on adoptera l'égalité:

$$\int_{x_0}^{x} f(x)\,dx = \int_{x_0}^{x} \varphi(x)\,dx + i\int_{x_0}^{x} \psi(x)\,dx,$$

et cette définition se justifie immédiatement, car ici encore l'intégrale est évidemment égale à la somme des valeurs que prend sa différentielle.

Nous allons en partant de là, généraliser des théorèmes sur les fonctions réelles dont on fait constamment usage en Calcul Intégral

Considérons, en premier lieu l'égalité:

$$\int_{a}^{b} f(x)\,dx = (b-a)\,f(\xi),$$

où $f(x)$ est une fonction réelle, et ξ une quantité comprise entre a et b. L'extension la plus naturelle et qui se présente immédiatement consisterait à poser:

$$\int_{a}^{b} [\varphi(x) + i\psi(x)]\,dx = (b-a)\,[\varphi(\xi) + i\,\psi(\xi')]$$

ξ et ξ' étant des nombres compris entre a et b. Mais M. Darboux, dans un mémoire inséré au Journal de M. Résal (1876), a fait connaître à ce sujet un résultat bien plus important, et que nous allons démontrer analytiquement, au lieu d'employer des considérations géométriques, comme l'a fait l'éminent géomètre.

Nous partirons de cette remarque élémentaire que le module d'une somme de quantités imaginaires est plus petit que la somme des modules de ces quantités, de sorte qu'en désignant par θ un nombre compris entre 0 et 1 on peut écrire:

$$\text{Mod}\,(a + a' + \ldots\ldots) = \theta\,(\text{mod.}\,a + \text{mod.}\,a' + \ldots)$$

On sait comment se démontre cette formule de proche en proche, après avoir établi par la représentation géométrique des imaginaires que le module d'une somme de deux termes est plus petit que la somme des modules des deux termes. Ceci rappelé, soit, $f(x) = \varphi(x) + i\,\psi(x)$, et

$$J = \int_{a}^{b} f(x)\,dx,$$

Considérons cette intégrale comme la somme des valeurs que prend sa différentielle quand x varie par degrés égaux à dx. D'après ce qu'on vient de savoir, on aura:

$$\text{Mod. } J = \theta \sum \text{mod.} f(x)\, dx,$$

puis comme conséquence de la définition même de l'intégrale définie:

$$\text{Mod. } J = \theta \int_a^b \text{mod.} f(x)\, dx.$$

On conclut de là en désignant par ξ un nombre compris entre a et b, et appliquant le théorème concernant les fonctions réelles.

$$\text{Mod. } J = \theta\, (b-a) \text{ mod. } f(\xi).$$

Les deux quantités J et $\theta\,(b-a) f(\xi)$ ont donc même module, et nous pouvons écrire:

$$J = \theta e^{i\omega} f(\xi)(b-a).$$

ou encore:

$$J = \lambda f(\xi)(b-a).$$

si l'on représente, comme le fait M. Darboux par λ, le facteur $\theta e^{i\omega}$ dont le module est inférieur à l'unité.

Supposons maintenant qu'on ait sous le signe d'intégration le produit de deux fonctions réelles $f(x)$ et $F(x)$ la seconde étant constamment positive entre les limites a et b. Si l'on désigne encore par ξ une quantité comprise entre ces limites, on a, comme on sait:

$$\int_a^b F(x) f(x) = f(\xi) \int_a^b F(x)\, dx;$$

je rappellerai succinctement comment se démontre cette relation. On part de cette remarque que la fraction

$$\frac{A\alpha + B\beta + C\gamma + \ldots\ldots}{A + B + C + \ldots\ldots},$$

où $A, B, C, \ldots\ldots$ sont supposés positifs, $\alpha, \beta, \gamma, \ldots\ldots$ étant des quantités réelles quelconques, est une moyenne entre ces dernières quantités. Cela étant, prenons pour $A, B, C, \ldots\ldots$ la suite des valeurs de $F(x)\, dx$ lorsque la variable croît de a à b par degrés égaux à dx, et pour $\alpha, \beta, \gamma, \ldots\ldots$ les valeurs correspondantes de $f(x)$. La fraction considérée devient ainsi:

$$\frac{\int_a^b F(x) f(x)\, dx}{\int_a^b F(x)\, dx},$$

et nous obtenons la relation proposée en l'égalant à $f(\xi)$, qui est l'expression d'une quantité intermédiaire entre toutes les valeurs que prend la fonction $f(x)$.

M. Darboux a généralisé aussi cette formule, en supposant $f(x) = \varphi(x) + i\,\psi(x)$. Voici comment on arrive analytiquement au résultat dont le

savant géomètre a tiré d'importantes conséquences.

Soit :

$$J = \int_a^b f(x)\,F(x)\,dx;$$

on aura, comme plus haut :

$$\text{Mod.}\, J = \theta \int_a^b \text{mod.}\, f(x) F(x)\,dx,$$

d'où, en remarquant que le module de $F(x)$ est $F(x)$ et appliquant la formule qui convient aux quantités réelles :

$$\text{Mod.}\, J = \theta\, \text{mod.}\, f(\xi) \int_a^b F(x)\,dx.$$

On en déduit comme tout à l'heure,

$$J = \lambda f(\xi) \int_a^b F(x)\,dx,$$

les lettres λ et ξ conservent la même signification que précédemment.

M. Darboux a montré comme conséquence de ce résultat que la série de Taylor

$$f(x) = f(a) + \frac{x-a}{1} f'(a) + \dots + \frac{(x-a)^n}{1.2\dots n} f^n(a) + \int_a^x \frac{(x-z)^n f^{n+1}(z)}{1.2\dots n}\,dz$$

établie en supposant x et a réels, peut être étendue à des valeurs imaginaires de ces quantités.

Je remarquerai pour cela que toute intégrale définie $J = \int_a^b \varphi(z)\,dz$ dont les limites sont nécessairement réelles, prend par la substitution, $z = a(1-t)+bt$ cette nouvelle forme.

$$J = (b-a)\int_0^1 \varphi[a(1-t)+bt]\,dt,$$

où il est permis d'attribuer à a et b, des valeurs imaginaires. Ce n'est pas là encore dans son sens analytique le plus général la définition qu'a donnée Cauchy, et à laquelle nous allons parvenir, des intégrales prises entre des limites imaginaires, mais sous ce point de vue restreint on est déjà conduit à d'importantes conséquences, et j'en donnerai un exemple en appliquant la formule précédente au reste de la série de Taylor.

Observons d'abord que l'on peut écrire :

$$J = \lambda\,(b-a)\,\varphi\,[a(1-\theta)+b\theta].$$

si l'on désigne par θ une valeur de t comprise entre zéro et l'unité, ou plus simplement :

$$J = \lambda\,(b-a)\,\varphi\,(\xi),$$

la quantité ξ étant l'affixe d'un point de la droite qui joint a et b. Cela étant supposons :

$$\varphi(z) = \frac{(x-z)^n f^{(n+1)}(z)}{1.2\dots n}, \quad \text{et } b = x,$$

on aura ainsi :

$$\varphi[a(1-t)+tx] = \frac{(x-a)^n (1-t)^n f^{n+1}[a(1-t)+tx]}{1.2\dots n}$$

ce qui donne :

$$J = (x-a)^{n+1}\int_0^1 \frac{(1-t)^n f^{n+1}[a(1-t)+tx]}{1.2\ldots\ldots n}\,dt;$$

on en conclut cette première forme du reste :

$$J = \frac{\lambda\,(x-a)^{n+1}(1-\theta)^n f^{(n+1)}(\xi)}{1.2\ldots\ldots n}$$

Une seconde s'obtient ensuite si l'on remarque que le facteur $(1-t)^n$ est toujours de même signe entre les limites de l'intégrale, de sorte qu'ayant : $\int_0^1 (1-t)^n dt = \frac{1}{n+1}$, la formule de Mr. Darboux précédemment établie nous donne :

$$J = \frac{\lambda\,(x-a)^{n+1} f^{(n+1)}(\xi)}{1.2\ldots\ldots n+1}$$

Ces deux expressions ne diffèrent que par le facteur λ de celles qui ont été établies pour les fonctions réelles de variables réelles (Voir le beau mémoire de Mr. Darboux sur le développement en série des fonctions d'une seule variable, Journal de Mr. Résal 1876).

On parviendrait encore par une autre voie à la série de Taylor en partant de la relation qui se vérifie d'elle-même et où l'on peut supposer x et a imaginaires,

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \int_0^1 f'[a(1-t)+tx]\,dt$$

et différentiant n fois les deux membres par rapport à a.

Nous partirons à cet effet de la formule :

$$(UV)^n = UV^n + \frac{n}{1}U'V^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1.2}U''V^{n-2} + \ldots$$

et nous supposerons : $U = f(a)$, $V = \frac{1}{x-a}$, ce qui donne en divisant par : $1, 2, \ldots\ldots n$:

$$\frac{1}{1,2\ldots\ldots n}\left[\frac{f(a)}{x-a}\right]^n = \frac{f(a)}{(x-a)^{n+1}} + \frac{f'(a)}{(x-a)^n} + \frac{1}{1,2}\frac{f''(a)}{(x-a)^{n-1}} + \ldots + \frac{1}{1,2\ldots n}\frac{f^n(a)}{x-a}.$$

Nous obtenons donc ainsi la relation :

$$\frac{f(t)}{(x-a)^{n+1}} - \frac{f(a)}{(x-a)^{n+1}} - \frac{f'(a)}{(x-a)^n} - \frac{1}{1,2}\frac{f''(a)}{(x-a)^{n-1}} - \frac{1}{1,2\ldots n}\frac{f^n(a)}{x-a} = -\frac{1}{1,2,\ldots\ldots n}\int_0^1 (1-t)^n f^{n+1}[a(1-t)+tx]\,dt,$$

et comme ce second membre est la quantité $\frac{J}{(x-a)^{n+1}}$ on retrouve en chassant le dénominateur la série de Taylor, avec l'expression du reste par la même intégrale que précédemment.

Mr. Weierstrass a donné une autre expression que nous allons encore établir de l'intégrale $\int_a^b F(x)\,f(x)\,dx$, où nous supposons toujours que $F(x)$ soit positif entre les limites et qu'on ait :

$$f(x) = \varphi(x) + i\,\psi(x).$$

Je partirai des formules de statique qui donnent les coordonnées ξ, η du point d'application de la résultante d'un système de forces parallèles, de même sens, et situées dans le même plan que je désignerai par $p, p', p'', \ldots\ldots$ Soit encore (x, y),

(x', y'), (x'', y''), ... les coordonnées de leurs points d'application, on aura :

$$\xi = \frac{\Sigma px}{\Sigma p}, \qquad \eta = \frac{\Sigma py}{\Sigma p},$$

et l'on sait, comme conséquence de la composition des forces, que ce point ξ, η est situé à l'extérieur d'un contour convexe, comprenant tous les points (x, y), (x', y'), etc.

Posons maintenant : $z = x + iy$ et $\mu = \xi + i\eta$, on pourra écrire :

$$\mu = \frac{\Sigma pz}{\Sigma p}.$$

Soit ensuite $z = f(x)$ et prenons pour p, p', p'', ... la suite des valeurs de $F(x)\,dx$ lorsque x croît de a à b, par degrés égaux à dx ; la formule précédente devient :

$$\mu = \frac{\int_a^b F(x) f(x)\, dx}{\int_a^b F(x)\, dx}$$

et nous en conclurons :

$$\int_a^b F(x) f(x)\, dx = \mu \int_a^b F(x)\, dx.$$

C'est le résultat de M. Weierstrass où le facteur μ représente l'affixe d'un point pris à l'intérieur d'un contour convexe qui contient la succession des divers points, c'est-à-dire le lieu représenté par la fonction $f(x) = \varphi(x) + i\,\psi(x)$ quand x varie de a à b. Il en résulte que si ce lieu est une courbe convexe, on peut le prendre lui-même pour le contour qui renferme le point μ.

Dans certains cas, la proposition de M. Weierstrass coïncide avec celle de M. Darboux. Supposons, par exemple, $f(x) = \rho\,(\cos x + i \sin x)$; alors le facteur $\lambda f(\xi)$ de M. Darboux est l'affixe d'un point situé à l'intérieur du cercle de rayon ρ, dont le centre est à l'origine, et il en est évidemment de même du facteur μ de M. Weierstrass. Mais il s'en faut de beaucoup que ces deux formules conduisent toujours ainsi au même résultat.

Soit, par exemple, $f(x) = \alpha + ib + \rho\,(\cos x + i \sin x)$. Il est clair alors que le facteur $\lambda f(\xi)$ est l'affixe d'un point situé à l'intérieur d'un cercle décrit de l'origine comme centre, avec le maximum du module de $f(x)$ pour rayon, tandis que le facteur μ est simplement l'affixe d'un point situé à l'intérieur d'un cercle de rayon ρ, l'abscisse et l'ordonnée du centre étant α et b. Le facteur de M. Darboux varie donc en général dans un champ beaucoup moins restreint que celui de M. Weierstrass, c'est cependant la formule de M. Darboux qui nous sera surtout utile et nous l'appliquerons bientôt à des questions importantes.

Nous arrivons maintenant à notre objet essentiel et nous allons donner d'après Cauchy, la définition du symbole :

$$J = \int_{a+ib}^{a'+ib'} f(z)\, dz,$$

$f(z)$ étant une fonction de la variable imaginaire $z = x + iy$, telle que pour tout système

de valeurs x et y, on puisse la mettre sous la forme $P+Qi$:

Soient A et A' les points dont les affixes sont $a+ib$ et $a'+ib'$. Joignons les par une courbe ou plutôt un chemin quelconque non interrompu, dont nous supposerons les coordonnées x et y exprimées par les formules $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$. Ces fonctions φ et ψ ne sont assujetties qu'à la condition de donner les points A et A' pour deux valeurs particulières de t, t_0 et t_1 par exemple, c'est-à-dire que l'on aura:

Fig. 31

$$\varphi(t_0)+i\psi(t_0)=a+ib$$
$$\varphi(t_1)+i\psi(t_1)=a'+ib'.$$

Il n'est pas nécessaire qu'elles aient, entre les limites t_0 et t_1, la même expression analytique, on peut admettre que le lieu considéré se compose de plusieurs parties de natures diverses, et s'exprimant par différentes fonctions de la variable t.

Cela posé, nous conviendrons d'opérer la substitution de la variable t à z, comme on le fait dans une intégrale à limites réelles, et de poser en conséquence:

$$J=\int_{t_0}^{t_1} f[\varphi(t)+i\psi(t)]\left(\frac{dx}{dt}+i\frac{dy}{dt}\right)dt$$
$$=\int_{t_0}^{t_1}(P+iQ)(dx+idy)$$
$$=\int_{t_0}^{t_1}(P\,dx-Q\,dy)+i\int_{t_0}^{t_1}(Q\,dx+P\,dy).$$

Les intégrales auxquelles nous sommes ainsi amenés sont de la forme $\int_{t_0}^{t_1}[U(x,y)\,dx+V(x,y)\,dy]$ qui comprend comme cas particulier les expressions $\int_{t_0}^{t_1}f(x,y)\,dt$; nous leur donnerons avec M. Karl Neumann le nom d'intégrales curvilignes, et nous ferons la remarque suivante:

Soit (figure 32) AMA' le lieu représenté par les relations $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$, σ l'arc compté à partir du point A. On pourra écrire:

Fig. 32

$$\int_{t_0}^{t_1}[U(x,y)\,dx+V(x,y)\,dy]=\int_{t_0}^{t_1}\left[U(x,y)\frac{dx}{d\sigma}+V(x,y)\frac{dy}{d\sigma}\right]d\sigma$$
$$=\int_{t_0}^{t_1}[U(x,y)\cos\varphi+V(x,y)\sin\varphi]\,d\sigma,$$

en désignant par φ l'angle que fait avec l'axe des abscisses la tangente à la courbe au point (x,y). On en déduit cette expression:

$$\int_{t_0}^{t_1}[U(x,y)\,dx+V(x,y)\,dy]=[U(\xi,\eta)\cos\varepsilon+V(\xi,\eta)\sin\varepsilon]\text{ arc AA}'$$

où ξ et η sont les coordonnées d'un certain point de l'arc AA' et ε l'angle de la tangente en ce point avec l'axe des x.

La notion d'intégrale définie prise entre des limites imaginaires se ramène donc complètement à celle d'intégrale curviligne où a été introduit comme

élément essentiel le chemin AA' que représentent analytiquement les formules $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$.

Nous ferons immédiatement une application du résultat qui vient d'être obtenu en établissant à l'égard de l'intégrale de Cauchy, une formule analogue à celle de M. Darboux.

Reprenons la formule,

$$J = \int_{t_0}^{t_1} (P + iQ)(dx + idy);$$

nous pouvons écrire :

$$\text{Mod. } J = \theta \int_{t_0}^{t_1} \text{mod. }(P + iQ) \times \text{mod }(dx + idy).$$

Or on a :

$$\text{Mod. }(dx + idy) = \sqrt{dx^2 + dy^2} = d\sigma,$$

en introduisant comme tout à l'heure l'arc σ de la courbe AA'; nous obtenons donc cette expression :

$$\text{Mod. } J = \theta \text{ mod. } f(\xi) \int_{t_0}^{t_1} d\sigma,$$

où ξ désigne une valeur comprise entre t_0 et t_1 ; on en déduit facilement avec le facteur λ de M. Darboux :

$$J = \lambda . \text{ arc AA'}. f(\xi).$$

Nous verrons bientôt de nombreuses applications de ce résultat.

8e Leçon.

L'objet principal de cette leçon sera d'étudier l'influence du chemin suivi par la variable z sur la valeur de l'intégrale de Cauchy. Ce chemin AA', défini par les équations :

$$x = \varphi(t), \qquad y = \psi(t),$$

et pouvant se composer, comme nous l'avons dit, de parties qui ne se représentent pas par les mêmes expressions analytiques, caractérise la loi de succession des valeurs de z entre les deux limites de l'intégrale : c'est ce que M. Neumann appelle le fil d'intégration de la fonction f entre les deux limites.

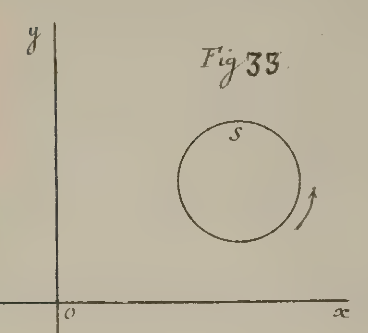
Pour traiter cette question, dont Cauchy a donné le premier la solution dans son célèbre mémoire sur les intégrales prises entre des limites imaginaires, nous suivrons de préférence la méthode due à Riemann, qui repose sur le cas particulier suivant d'une importante proposition de George Green.

Soient U et V deux fonctions de x et y, réelles, continues et uniformes à l'intérieur d'une aire S ; je dis que l'intégrale curviligne relative au contour de cette aire $\int(Udx + Vdy)$ s'exprime par l'intégrale double.

$$\iint \left(\frac{dV}{dx} - \frac{dU}{dy}\right) dx\, dy$$

qui représente le volume d'un cylindre ayant pour base S, et limité par la surface : $z = \frac{dV}{dx} \frac{dU}{dy}$.

Pour démontrer ce théorème, supposons d'abord que la courbe qui comprend l'aire satisfasse à cette condition qu'à chaque abscisse correspondent seulement deux ordonnées, et de même à chaque ordonnée deux abscisses.



Admettons de plus que le contour soit décrit une seule fois et dans le sens direct, c'est-à-dire de manière à avoir l'espace illimité à droite. Avec ces restrictions et les notions que nous avons données antérieurement sur les intégrales curvilignes, la démonstration de l'égalité:

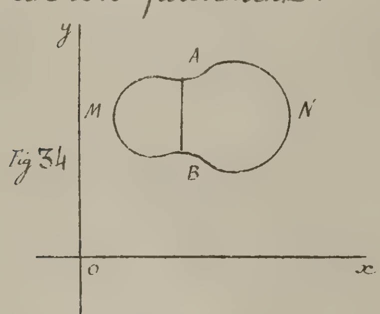
$$\iint\left(\frac{dV}{dx}-\frac{dU}{dy}\right) dx\, dy = \int_S (U dx + V dy)$$

est immédiate. Décomposons, en effet, l'intégrale double du premier membre en ses deux termes; le premier à savoir: $\iint \frac{dV}{dx} dx\, dy$ a été étudié et nous est connu; nous l'avons exprimé par l'intégrale simple $\int_S V dy$, le contour de l'aire S étant décrit dans le sens direct. Quant au second $\iint \frac{dU}{dy} dx\, dy$, c'est de même $\int_S U dx$; mais le contour est alors décrit en sens inverse. On a donc en retranchant:

$$\iint\left(\frac{dV}{dx}-\frac{dU}{dy}\right) dx\, dy = \int_S V dy + \int_S U dx = \int_S (U dx + V dy);$$

c'est précisément ce qu'il fallait démontrer.

Les fonctions U et V doivent être finies, continues et uniformes. Nous avons dit de plus que la courbe qui limite l'aire était telle que pour chaque valeur de x on obtient deux valeurs seulement pour y et pour chaque valeur de y deux valeurs de x; cette restriction peut être levée facilement.



Considérons, en effet, une courbe AMBNA, où quatre abscisses différentes peuvent correspondre à une même ordonnée. Je supposerai qu'en menant la ligne AB, les deux aires AMBA et ABNA restent dans le cas qui a été traité nous raisonnerons alors comme il suit:

Soit $J = \iint\left(\frac{dV}{dx}-\frac{dU}{dy}\right) dx\, dy$ l'intégrale double qui se rapporte à tous les points de l'aire AMBNA. J représente le volume du cylindre ayant pour base cette aire et limité par la surface $z = \frac{dV}{dx}-\frac{dU}{dy}$, nommant donc J_1 et J_2 les valeurs de l'intégrale double que nous considérons relativement aux aires partielles AMBA, ABNA, on aura: $J = J_1 + J_2$; or on peut appliquer le théorème aux intégrales J_1 et J_2.

En désignant pour cela par l'indication du chemin entre parenthèses la valeur de l'intégrale $\int(U dx + V dy)$ relative à ce chemin, nous aurons:

$$J = (AMBA) + (ABNA).$$

Or on peut écrire:

$$(AMBA) = (AMB) + (BA)$$
$$(ABNA) = (AB) + (BNA),$$

et de la relation $(AB)+(BA)=0$, nous concluons:

$$J = (AMB)+(BNA) = (AMBNA).$$

J est donc encore, comme dans le cas précédent, égale à l'intégrale curviligne prise par rapport au contour de l'aire. D'ailleurs si compliqué que soit un contour, on peut toujours le décomposer en un nombre suffisamment grand de parties pour que chacune d'elles satisfasse aux conditions que nous avions d'abord imposées ; on voit donc en raisonnant de proche en proche, comme nous venons de le faire, que le théorème s'applique à un contour quelconque.

Dans l'ouvrage déjà cité de M. Neumann, on trouve la notion que nous devons exposer des aires à plusieurs contours. Nous dirons qu'une aire à n contours est la portion du plan limitée par une courbe extérieure et par $n-1$ autres courbes séparées situées à l'intérieur de la première.

Fig 35

Considérons, en particulier, une aire à deux contours: nous allons étendre à ce nouveau cas, le théorème précédent et donner en même temps la définition de ce qu'on appelle décrire le contour de cette aire.

Soit l'intégrale double $\iint\left(\frac{dV}{dx}-\frac{dU}{dy}\right)dx\,dy$ prise relativement à tous les points de la surface comprise entre les deux courbes et qui représentera ainsi le volume d'un cylindre creux.

Imaginons les lignes de partage AB, DE, de telle sorte que l'aire considérée résulte des deux aires simples $AMEDCBA$ et $ABFDENA$; soient J_1 et J_2 les valeurs de l'intégrale double relativement à chacune d'elles; en se rappelant la signification géométrique de J on voit immédiatement que l'on a:

$$J = J_1 + J_2$$

Or, on peut appliquer le théorème aux intégrales J_1 et J_2, ce qui donne:

$$J_1 = (AMEDCBA) = (AME)+(ED)+(DCB)+(BA)$$
$$J_2 = (ABFDENA) = (AB)+(BFD)+(DE)+(ENA)$$

En remarquant, comme plus haut, que les intégrales relatives à un même chemin décrit dans deux sens différents ont une somme nulle, on aura:

$$J = (AME)+(ENA)+(BFD)+(DCB)$$
$$= (AMENA)+(BFDCB).$$

Nous voyons donc que J est égal à la somme des intégrales curvilignes relatives aux deux contours, chacun d'eux étant décrit de manière que l'aire limitée se trouve toujours a gauche; c'est ce que M. Neumann appelle décrire une aire à deux contours dans le sens direct; on peut donc dire encore que J est égale à l'intégrale curviligne $\int(U\,dx+V\,dy)$ prise par rapport au contour total de l'aire décrit dans ce sens. Il est, d'ailleurs, évident que le même raisonnement s'applique sans modification à une aire

à n contours. Nous avons donc établi pour de telles aires le théorème dont nous allons maintenant faire usage pour démontrer, comme le fait Riemann, la proposition fondamentale de Cauchy.

Soit une fonction $f(z)$ de la variable imaginaire $z = x + iy$, continue et uniforme dans une aire limitée par un ou plusieurs contours, je dis que l'intégrale de cette fonction prise en décrivant le contour d'une telle aire est nulle.

Nous admettrons qu'on puisse écrire:

$$f(z) = P + iQ,$$

P et Q étant des fonctions réelles, continues et uniformes de x et y, nous supposerons aussi que z décrivant le contour considéré, x et y soient représentés par les expressions: $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$.

Cela étant, nous partirons de la formule précédemment donnée:

$$J = \int (P\,dx - Q\,dy) + i\int (Q\,dx + P\,dy),$$

où les deux intégrales du second membre sont des intégrales curvilignes qui se rapportent à ce contour. Nous emploierons ensuite en nous fondant sur le théorème de Green, les expressions suivantes:

$$\int \left[P\,dx - Q\,dy\right] = \iint \left(-\frac{dQ}{dx} - \frac{dP}{dy}\right) dx\,dy$$

$$\int \left[Q\,dx + P\,dy\right] = \iint \left(\frac{dP}{dx} - \frac{dQ}{dy}\right) dx\,dy.$$

Or on sait que les fonctions P et Q sont liées par les relations fondamentales

$$\frac{dP}{dx} = \frac{dQ}{dy}, \qquad \frac{dP}{dy} + \frac{dQ}{dx} = 0,$$

les deux intégrales sont donc nulles; il en est de même de J, et notre théorème est démontré.

Nous allons maintenant en développer quelques conséquences.

Fig 36

En premier lieu considérons les valeurs J_1 et J_2 de l'intégrale $\int_{a+ib}^{a'+ib'} f(z)\,dz$, lorsque la variable z parvient du point A au point A' par deux chemins différents AMA', ANA', tels qu'à l'intérieur du contour formé par leur réunion la fonction $f(z)$ reste continue et uniforme. La seconde intégrale prise le long du chemin A'NA est $-J_2$; si on applique le théorème précédent, on a donc: $J_1 - J_2 = 0$, c'est-à-dire que la valeur de l'intégrale ne change pas quand le chemin AMA' se déforme sans atteindre aucun point pour lequel la fonction $f(z)$ cesse d'être continue et uniforme.

Fig 37

Considérons, en second lieu deux courbes fermées l'une étant intérieure à l'autre, et telles que dans l'aire qu'elles comprennent la fonction $f(z)$ soit continue et uniforme. Je dis que les intégrales de $f(z)\,dz$ prises le long

de ces deux courbes sont égales.

Soient, en effet, J_1 et J_2 les valeurs des intégrales prises le long de ces deux courbes décrites chacune dans le sens direct, en appliquant le théorème fondamental et se rappelant ce que nous avons appelé décrire une aire à deux contours dans le sens direct, on a : $J_1 - J_2 = 0$; c'est ce qu'il s'agissait de prouver.

Fig. 38.

Appliquons ces résultats à la plus simple des fonctions uniformes qui éprouve une discontinuité.

Soit $f(z) = \frac{1}{z-a}$; considérons une courbe fermée comprenant le point A dont l'affixe est a ; l'intégrale $\int \frac{dz}{z-a}$ prise le long de cette courbe se calcule facilement, en remarquant qu'elle ne change pas, d'après la remarque précédente, si on la remplace par un cercle de rayon ρ suffisamment petit, décrit du point A comme centre. Alors on devra faire :

$$z - a = \rho e^{it} ; \qquad dz = i\rho e^{it} dt ;$$

ce qui conduit à la quantité :

$$\int_0^{2\pi} \frac{i\rho e^{it} dt}{\rho e^{it}} = i \int_0^{2\pi} dt = 2i\pi .$$

Telle est par conséquent la valeur de l'intégrale $\int \frac{dz}{z-a}$ prise le long d'un contour fermé, décrit une seule fois, dans le sens direct, et comprenant le point a.

Il ne faudrait cependant pas croire que la quantité $\int f(z)dz$ soit différente de zéro toutes les fois que $f(z)$ cesse d'être continue et uniforme dans une aire donnée. Ainsi l'intégrale $\int \frac{dz}{(z-a)^{n+1}}$, où n est un nombre entier positif est nulle si on la prend le long d'un contour comprenant le point a. On le prouve facilement soit en raisonnant comme précédemment, soit en différentiant n fois la formule que nous venons d'obtenir $\int \frac{dz}{z-a} = 2\pi i$ par rapport à a.

Plus généralement l'intégrale $\int f'(z)\, dz$, où $f(z)$ désigne une fonction uniforme, étant égale à cette fonction augmentée d'une constante, on obtiendra, lorsque z décrit un contour fermé, la même quantité au point de départ et au point d'arrivée. L'intégrale relative à ce contour est donc nulle, quel que soit à son intérieur le nombre des valeurs de la variable qui rendent la fonction infinie.

Considérons, en dernier lieu, une fonction non uniforme de z, et faisons décrire à la variable une courbe comprenant un point de ramification.

Soit, par exemple, $f(z) = z^{a-1}$, où a n'est pas entier, quand l'argument de z augmente de 2π, la fonction se reproduit multipliée par $e^{2ai\pi}$, l'origine est donc un point de ramification.

Calculons l'intégrale $J = \int z^{a-1} dz$ prise le long d'un cercle de rayon R et dont le centre soit à l'origine, nous poserons : $z = Re^{it}$; l'intégrale indéfinie de $z^{a-1}dz$ étant $\frac{z^a}{a} = \frac{(Re^{it})^a}{a}$, on en conclut, en faisant varier t de $\theta - \pi$ à $\theta + \pi$, afin de décrire la circonférence en entier :

$$J = \frac{2i \sin a\pi (Re^{i\theta})^a}{a}$$

Cette expression montre que la valeur de J change avec R et θ, c'est-à-dire avec le point initiale sur le cercle. Pour $\theta = 0$, on a en particulier:

$$J = \frac{2i \sin a\pi R^a}{a}$$

Ces remarques faites, nous commencerons les applications des principes que nous venons d'établir, en démontrant le théorème suivant :

Soit $f(z)$ une fonction continue et uniforme dans une aire limitée par un contour quelconque, soit x un point de cette aire, on a :

$$f(x) = \frac{1}{2i\pi}\int \frac{f(z)}{z-x}\, dz,$$

l'intégrale étant prise le long du contour décrit dans le sens direct.

Du point x comme centre avec un rayon infiniment petit ρ, décrivons une circonférence. La fonction $\frac{f(z)}{z-x}$ est uniforme et continue dans l'aire comprise entre le contour donné et cette circonférence; donc les intégrales $\int \frac{f(z)\,dz}{z-x}$ relatives aux deux courbes, décrites chacune dans le sens direct par rapport à l'aire qu'elles enveloppent sont égales. Evaluons l'intégrale relative à la circonférence; à cet effet, posons :

$$z = x + \rho e^{it},$$

on aura :

$$dz = i\rho e^{it}\, dt.$$

L'intégrale cherchée est donc :

$$i\int_0^{2\pi} f(x+\rho e^{it})\, dt$$

Or ρ est infiniment petit, et la fonction $f(z)$ est continue; cette expression devient par conséquent

$$if(x)\int_0^{2\pi} dt = 2i\pi f(x)$$

et l'on en conclut :

$$2i\pi f(x) = \int \frac{f(z)}{z-x}\, dz.$$

l'intégrale étant prise le long du contour de l'aire : c'est le théorème annoncé.

Cette proposition, découverte par Cauchy, est d'une extrême importance dans l'analyse. Les leçons suivantes vont être consacrées à développer la serie des consequences auxquelles elle conduit.

9.e Leçon.

La première application que nous ferons de la formule de Cauchy, démontrée dans la leçon précédente, a pour objet d'établir la série de Taylor et celle de Maclaurin dans le sens anlytique le plus étendu en considérant des valeurs réelles ou imaginaires de la variable; ce sera notre point de départ dans la théorie générale des fonctions.

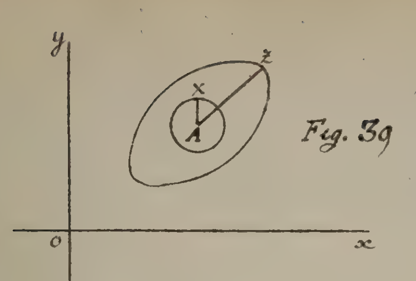


Fig. 39

Soit $f(z)$ une fonction continue et uniforme dans une aire limitée par une courbe S (fig. 39). Considérons avec M. Neumann une circonférence entièrement contenue dans dans cette aire, dont le centre soit A et le rayon AX ; nommons a et x les affixes de A et X, z celle d'un point Z de la courbe S; on aura la condition:

$$\text{Mod}(x-a) < \text{Mod}(z-a),$$

les deux modules étant les distances AX et AZ. Ceci posé, l'expression de $f(x)$ au moyen de la formule:

$$f(x) = \frac{1}{2i\pi}\int_S \frac{f(z)\,dz}{z-x}$$

va nous donner le développement de cette fonction par la série de Taylor; comme conséquence de la simple identité:

$$\frac{1}{z-x} = \frac{1}{z} + \frac{x}{z^2} + \frac{x^2}{z^3} + \cdots\cdots + \frac{x^n}{z^n(z-x)}$$

Changeons à cet effet z en $z-a$ et x en $x-a$, on en conclut:

$$\frac{1}{z-x} = \frac{1}{z-a} + \frac{x-a}{(z-a)^2} + \cdots\cdots + \frac{(x-a)^n}{(z-a)^n(z-x)}$$

Multiplions ensuite les deux membres par $f(z)\,dz$, intégrons le long de la courbe S et divisons par $2i\pi$, on parvient à la relation suivante:

$$f(x) = J_0 + J_1(x-a) + \cdots\cdots + J_{n-1}(x-a)^{n-1} + R$$

où j'ai posé:

$$J_k = \frac{1}{2i\pi}\int_S \frac{f(z)\,dz}{(x-a)^{k+1}},$$

$$R = \frac{1}{2i\pi}\int_S \left(\frac{x-a}{z-a}\right)^n \frac{f(z)\,dz}{z-x}.$$

Soit maintenant σ le périmètre de la courbe S, une formule concernant les intégrales curvilignes qui a été précédemment donné page (65) nous permet d'écrire en faisant entrer l'imaginaire i dans le facteur λ :

$$R = \frac{\lambda\sigma}{2\pi}\left(\frac{x-a}{\zeta-a}\right)^n \frac{f(\zeta)}{\zeta-x}.$$

La quantité ζ représente dans cette expression l'affixe d'un certain point de S, le module de $\frac{x-a}{\zeta-a}$ est donc inférieur à l'unité; ses puissances décroissent au delà de toute limite, et il se trouve immédiatement établi que pour une valeur suffisamment grande de n, R qui est le reste de la série peut devenir moindre que toute quantité donnée.

Après avoir ainsi démontré la possibilité du développement de la fonction $f(x)$ en série ordonnée suivant les puissances de $x-a$, au moyen de la formule de Cauchy, nous déduirons de cette même formule les valeurs des coefficients J_k. Je prends pour cela les dérivées d'ordre k, par rapport à x, des deux membres de l'équation:

$$f(x) = \frac{1}{2i\pi}\int_S \frac{f(z)\,dz}{z-x},$$

on parvient de cette manière à l'expression suivante dont il est souvent fait usage,

$$\frac{f^k(x)}{1.2\ldots k} = \frac{1}{2i\pi}\int \frac{f(z)\,dz}{(z-x)^{k+1}}$$

Supposons ensuite $x = a$, nous en concluons la valeur cherchée:

$$J_k = \frac{f^k(a)}{1.2\ldots\ldots k},$$

et par conséquent la formule:

$$f(x) = f(a) + f'(a)\frac{x-a}{1} + \ldots + f^k(a)\frac{(x-a)^k}{1.2\ldots k} + \ldots$$

sous les conditions énoncées plus haut.

On remarquera que l'expression de R donne facilement la forme élémentaire du reste, dans le cas des quantités réelles. En différentiant par rapport à a, il vient en effet:

$$\frac{dR}{da} = -\frac{n(x-a)^{n-1}}{2i\pi}\int_s \frac{f(z)\,dz}{(z-a)^{n+1}}$$

et par conséquent:

$$\frac{dR}{da} = -\frac{(x-a)^{n-1}f^n(a)}{1.2\ldots\ldots(n-1)}$$

Le reste s'annulant pour $x-a$, nous en concluons:

$$R = -\int_x^a \frac{(x-a)^{n-1}f^n(a)}{1.2\ldots(n-1)}\,da$$

$$= +\int_a^x \frac{(x-a)^{n-1}f^n(a)}{1.2\ldots(n-1)}\,da;$$

puis comme le facteur $x-a$ est positif entre les limites de l'intégrale.

$$R = f^n(\xi)\int_a^x \frac{(x-a)^{n-1}\,da}{1.2\ldots(n-1)}$$

$$= \frac{(x-a)^n f^n(\xi)}{1.2\ldots\ldots n},$$

ξ étant une quantité comprise entre a et x.

On passe de la série de Taylor à celle de Maclaurin, en supposant que le point A soit l'origine. De là cette conséquence que $f(x)$ est développable en série convergente ordonnée suivant les puissances de la variable par la formule:

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1}f'(0) + \frac{x^2}{1.2}f''(0) + \ldots\ldots$$

lorsque la fonction est finie, continue et uniforme à l'intérieur du cercle ayant son centre à l'origine et pour rayon le module de x, Cauchy, à qui est due cette proposition importante, l'énonce ainsi: Une fonction $f(x)$ est développable en série convergente par la formule de Maclaurin, sous la condition que le module de la variable soit inférieur à la plus petite des quantités pour lesquelles elle cesse d'être continue et uniforme.

Le théorème de Cauchy dispense donc de la discussion du reste, que demande

l'emploi de la formule de Maclaurin dans le calcul différentiel, discussion le plus souvent impossible, parce qu'elle exige qu'on connaisse l'expression d'une dérivée d'ordre quelconque de la fonction.

L'application de la formule de Maclaurin aux fonctions e^x, $\sin x$, $\cos x$, qui sont dans toute l'étendue du plan, finies et continues, donne les développements :

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \cdots + \frac{x^n}{1.2\ldots\ldots n} + \cdots\cdots$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} + \cdots\cdots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} + \cdots\cdots,$$

dont la convergence se trouve ainsi établie quelque soit la valeur réelle ou imaginaire de la variable. Je m'arrêterai un moment à ces séries qui sont d'une importance fondamentale en analyse, pour en conclure que les puissances du nombre e et le rapport de la circonférence au diamètre sont des quantités incommensurables.

Soit en premier lieu :

$$F(x) = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \cdots\cdots + \frac{x^{n-1}}{1.2\ldots\ldots n-1}$$

de sorte qu'on ait :

$$\frac{e^x - F(x)}{x^n} = \frac{1}{1.2\ldots\ldots n}\left[1 + \frac{x}{n+1} + \frac{x^2}{(n+1)(n+2)} + \cdots\cdots\right]$$

On forme aisément, en prenant la dérivée d'ordre $n-1$ des deux membres, la relation :

$$\frac{e^x \Pi(x) - \Phi(x)}{x^{2n-1}} = \frac{1}{1.2\ldots\ldots n}\sum \frac{(m+1)(m+2)\ldots\ldots(m+n-1)}{(n+1)(n+2)\ldots\ldots(2n+m-1)}x^n;$$

$$\{ m = 0.1.2\ldots\ldots \}$$

où $\Pi(x)$ est un polynôme à coefficients entiers de degré $n-1$, à savoir :

$$\Pi(x) = x^{n-1} - n(n-1)x^{n-2} + \frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{1.2}x^{n-3},$$

et l'on a ensuite :

$$\Phi(x) = \Pi(-x)$$

Cela étant, soit pour un moment :

$$S = \sum \frac{(m+1)(m+2)\ldots\ldots(m+n-1)}{(n+1)(n+2)\ldots\ldots(2n+m-1)}x^m,$$

de sorte qu'on ait :

$$e^x \Pi(x) - \Phi(x) = \frac{S x^{2n+1}}{1.2\ldots\ldots n};$$

Nous conclurons de là que pour x entier il est impossible que l'exponentielle e^x soit commensurable.

Supposons, en effet, $e^x = \frac{B}{A}$; , A et B étant entier, cette relation devient:

$$B\,\Pi(x) - A\,\phi(x) = \frac{A S x^{2n+1}}{1.2.\ldots.n}$$

et conduit à une contradiction. Elle résulte de ce que ce premier membre est un nombre entier, tandis que le second diminue en faisant croître n autant qu'on veut, sans jamais s'évanouir. La série S qui y figure a effectivement ses termes positifs, elle est donc toujours différente de zéro et sa valeur décroît quand n augmente. D'autre part, le facteur $\frac{x^{2n+1}}{1.2\ldots n}$ a zéro pour limite, ce qui met immédiatement en évidence l'impossibilité de la relation supposée.

Voici ensuite comment se démontre l'irrationabilité du rapport de la circonférence au diamètre.

Soit $X = \frac{\sin x}{x}$, et faisons successivement:

$$X_1 = -\frac{1}{x}X' = \frac{1}{x^3}\,(\sin x - x\cos x)$$

$$X_2 = -\frac{1}{x}X_1' = \frac{1}{x^5}\,[(3-x^2)\sin x - 3x\cos x]$$

$$X_3 = -\frac{1}{x}X_2' = \frac{1}{x^7}\,[(15-6x^2) - (15x - x^3)\cos x]$$

....

En posant, en général, $X_{n+1} = -\frac{1}{x}X_n'$, il est aisé de voir qu'on a cette expression:

$$X_n = \frac{1}{x^{2n+1}}\,[\Theta(x)\sin x - \Theta_1(x)\cos x]$$

où $\Theta(x)$ et $\Theta_1(x)$ représentent des polynômes à coefficients entiers, qui sont de degrés n et $n-1$, ou bien de degrés $n-1$ et n, suivant que n est pair ou impair.

D'autre part, on obtient au moyen du développement de $\sin x$,

$$X_n = \frac{1}{1.3.5\ldots 2n+1}\left[1 - \frac{x^2}{2(2n+3)} + \frac{x^4}{2.4(2n+3)(2n+5)} - \ldots\right]$$

$$= \frac{S}{1.3.5\ldots 2n+1},$$

et en écrivant:

$$S = \left[1 - \frac{x^2}{2(2n+3)}\right] + \frac{x^4}{2.4(2n+3)(2n+5)}\left[1 - \frac{x^2}{6(2n+7)}\right] + \ldots$$

nous remarquerons que cette série aura une valeur positive essentiellement différente de zéro si l'on pose $1 - \frac{x^2}{2(2n+3)} > 0$, condition qui est satisfaite pour $x = \frac{\pi}{2} = 1,57\ldots$ à partir de $n=1$, et à fortiori pour les valeurs plus grandes.

Ce point établi, admettons qu'on ait $\frac{\pi}{2} = \frac{b}{a}$, a et b étant des nombres entiers. Le polynôme $\Theta(x)$, en y faisant $x = \frac{b}{a}$, devient une fraction dont le dénominateur est a^n ou a^{n-1}, suivant son degré, et que je représente par $\frac{A}{a^n}$. Cette fraction, si l'on suppose $x = \frac{\pi}{2} = \frac{b}{a}$ dans la relation:

$$[\Theta(x)\sin x - \Theta_1(x)\cos x] = \frac{S\,x^{2n+1}}{1,3\ldots\ldots 2n+1}$$

s'obtient sous la forme suivante :

$$\frac{A}{a^n} = \frac{S\left(\frac{b}{a}\right)^{2n+1}}{1.3.5\ldots\ldots 2n+1},$$

ce qui donne :

$$A a^{n+1} = \frac{S(ab)^{2n+1}}{1.3.5\ldots\ldots 2n+1}$$

Le résultat ainsi obtenu implique contradiction, le premier membre étant entier, tandis que le second diminue indéfiniment sans jamais être nul, d'après ce qui a été dit de la série S, lorsqu'on fait croître le nombre n. J'ajoute enfin que $\Theta(x)$ ne contenant que des puissances paires, la même méthode prouve que le carré de $\frac{\pi}{2}$ est lui-même une quantité incommensurable.

Nous continuerons les applications de la formule de Maclaurin en considérant les expressions $\log(1+x)$ et $(1+x)^n$, lorsque l'exposant n n'est pas entier. Nous savons que c'est à l'intérieur d'une circonférence de rayon égal à l'unité, ayant son centre à l'origine, que ces quantités représentent des fonctions finies, continues et uniformes. On en conclut que les développements :

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots\ldots$$

$$(1+x)^n = 1 + \frac{n}{1}x + \frac{n(n-1)}{1.2}x^2 + \ldots\ldots$$

sont applicables uniquement aux valeurs de la variable dont le module est inférieur à l'unité.

Dans le cas où l'exposant n est entier, la formule du binôme me donnera l'occasion d'employer les expressions des coefficients J_k de la série de Maclaurin, sous forme d'intégrales curvilignes.

$$J_k = \frac{1}{2i\pi}\int_S \frac{f(z)\,dz}{z^{k+1}}$$

Si nous posons, pour abréger :

$$N = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{1.2\ldots\ldots k}$$

on aura donc :

$$\int_S \frac{(1+z)^n}{z^{k+1}}dz = 2i\pi N.$$

Prenons pour contour d'intégration une circonférence de rayon égal à l'unité, ayant son centre à l'origine, et soit en conséquence $z = e^{it}$. Nous obtenons ainsi :

$$1 + z = 2\cos\frac{t}{2}\left[\cos\frac{t}{2} + i\sin\frac{t}{2}\right],$$

puis : $\displaystyle\int_0^{2\pi}\left(2\cos\frac{t}{2}\right)^n\left[\cos\frac{n-2k}{2}t + i\sin\frac{n-2k}{2}t\right]dt = 2\pi N.$

On voit que le coefficient de i dans le premier membre doit être nul, de sorte qu'il vient plus simplement :

$$\int_0^{2\pi}\left(2\cos\frac{t}{2}\right)^n\cos\frac{n-2k}{2}t.\,dt = 2\pi N.$$

Changeons, pour plus de symétrie, n en $n+k$; remplaçons N par sa valeur et posons

$t = 2u$, on aura cette intégrale définie :

$$\int_0^{\pi} (2\cos u)^{n+k} \cos (n-k) u \, du = \pi \frac{(n+1)(n+2)\ldots\ldots(n+k)}{1.2.\ldots\ldots k}$$

que Cauchy au moyen de la fonction Γ a étendue à des valeurs quelconques de n et k.

On en tire dans le cas particulier de $n=k$:

$$\int_0^{\pi} (2\cos u)^{2n} du = \pi \frac{(n+1)(n+2)\ldots\ldots 2n}{1.2.\ldots\ldots n},$$

puis, en posant $\cos u = x$, après une transformation facile :

$$\int_{-1}^{+1} \frac{x^{2n} dx}{\sqrt{1-x^2}} = \pi \frac{1,3,5\ldots\ldots 2n-1}{2.4.6\ldots\ldots 2n},$$

ou encore :

$$\int_0^{1} \frac{x^{2n} dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1.3.5\ldots.2n-1}{2.4.6\ldots.2n}$$

Nous ferons bientôt usage de ce résultat.

Notre dernière application de la formule de Maclaurin concerne la quantité arc tg. x, pour laquelle on a obtenu dans les éléments la série :

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots\ldots$$

en supposant essentiellement la variable réelle et moindre que l'unité.

Nous remarquerons que la définition géométrique, limitée aux valeurs réelles de la variable, est insuffisante pour cette application qui repose sur la connaissance de la fonction dans tout le plan ou une région du plan. J'appliquerai à l'intégrale $\int_0^x \frac{dx}{1+x^2}$ qui représente pour des valeurs réelles de la limite l'arc le plus petit dont la tangente est x ; la considération précédemment employée (p61). On en déduit en remplaçant x par tx, cette nouvelle expression $\int_0^1 \frac{x\, dt}{1+t^2x^2}$, où la quantité sous le signe d'intégration a un sens parfaitement déterminé pour des valeurs imaginaires de la variable, les limites étant constantes. L'extension cherchée s'obtient par conséquent en posant :

$$\operatorname{arc\,tg} z = \int_0^1 \frac{z\, dt}{1+z^2t^2},$$

et ce résultat appelle l'attention comme donnant de la fonction arc tg z une définition entièrement nouvelle. L'intégrale n'est susceptible, en effet, que d'une seule et unique détermination, tandis que la fonction en comprend, comme on le sait, un nombre infini. La même circonstance s'offre à l'égard de $\log(1+z)$; si on l'exprime par la formule :

$$\log(1+z) = \int_0^1 \frac{z\, dt}{1+zt},$$

il semblera pareillement que le logarithme puisse être regardé comme n'ayant dans toute l'étendue du plan qu'une seule et unique valeur. Les difficultés que nous signalons tiennent à une notion analytique nouvelle et de la plus haute importance qui en donnera la complète solution, celle des lignes de discontinuité, désignées sous le nom de coupures, dans

les travaux de Riemann. Ces lignes se présentent naturellement si l'on remarque que la définition des deux fonctions par les intégrales $\int_0^1 \frac{z\,dt}{1+z^2t^2}$, $\int_0^1 \frac{z\,dt}{1+zt}$, fait défaut quand les dénominateurs $1+z^2t^2$ et $1+zt$ s'annulent. On voit en faisant varier t de zéro à l'unité que le lieu de l'équation $1+z^2t^2=0$ est représenté (fig. 40) par les portions illimitées de l'axe des y, AM et $A'M'$, si l'on suppose $OA = OA' = 1$, tandis que la relation $1+zt=0$ donne la portion indéfinie BN de l'axe des x, la distance OB étant de même égale à l'unité.

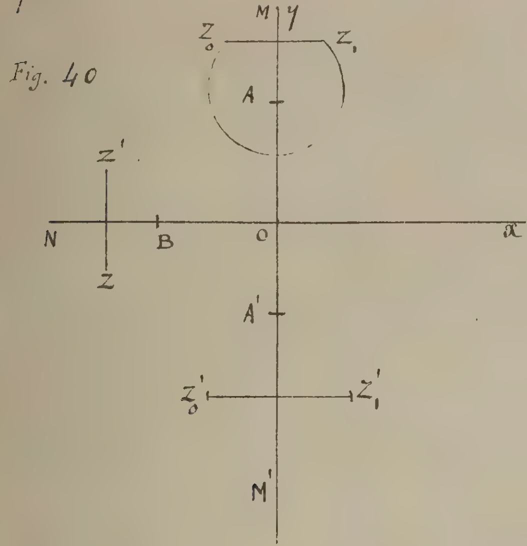


Fig. 40

On peut aussi remarquer qu'en écrivant :

$$\int_0^1 \frac{z\,dt}{1+z^2t^2} = \frac{1}{2i}\left[\int_0^1 \frac{dt}{t-\frac{i}{z}} - \int_0^1 \frac{dt}{t+\frac{i}{z}}\right]$$

la première intégrale est indéterminée le long de AM et la seconde le long de $A'M'$.

Voici maintenant le caractère analytique de ces droites.

Je considère l'expression plus générale :

$$J = \int_a^b \frac{dt}{t+iz},$$

Fig. 41

où la ligne d'indétermination est la partie de l'axe des y comprise entre $OA = a$ et $OB = b$.

Soit C un point de cette ligne, $OC = \zeta$, puis $z = i\zeta - \varepsilon$, $z' = i\zeta + \varepsilon$ les affixes de deux points D et D' pris à égale distance de C sur une perpendiculaire à l'axe. Soit aussi :

$$J = \int_a^b \frac{dt}{t+i(i\zeta-\varepsilon)}, \qquad J' = \int_a^b \frac{dt}{t+i(i\zeta+\varepsilon)}$$

On a :

$$J - J' = \int_a^b \frac{2i\varepsilon\,dt}{(t-\zeta)^2+\varepsilon^2}$$

et si l'on effectue l'intégration :

$$J - J' = 2i\left[\operatorname{arctg}\frac{b-\zeta}{\varepsilon} - \operatorname{arctg}\frac{a-\zeta}{\varepsilon}\right].$$

Supposons maintenant ε infiniment petit ; comme ζ est moindre que b et supérieur à a, on obtient à la limite :

$$\operatorname{arc\,tg}\frac{b-\zeta}{\varepsilon} = \frac{\pi}{2}, \qquad \operatorname{arc\,tg}\frac{a-\zeta}{\varepsilon} = -\frac{\pi}{2}$$

et par conséquent :

$$J - J' = 2i\pi.$$

La différence des valeurs de l'intégrale aux deux points infiniment voisins, D et D', étant une quantité finie, il est ainsi établi que la ligne d'indétermination est une ligne de discontinuité.

Appliquons ce résultat à la quantité que nous avons en vue.

$$\int_0^1 \frac{z\,dt}{1+z^2t^2} = \frac{1}{2i}\left[\int_0^1 \frac{dt}{t-\frac{i}{z}} - \int_0^1 \frac{dt}{t+\frac{i}{z}}\right]$$

Nous considérerons deux points z_0 et z_1 infiniment voisins, sur une perpendiculaire à AM (fig 40) et semblablement deux points z'_0 et z'_1 de part et d'autre de A'M'. En désignant, pour abréger, les valeurs correspondantes de l'intégrale par (z_0), (z_1) etc, nous obtenons les relations :

$$(z_1) - (z_0) = \pi, \qquad (z'_1) - (z'_0) = -\pi.$$

D'une manière analogue, on trouve à l'égard de l'intégrale $\int_0^1 \frac{z\,dt}{1+zt}$, par laquelle nous avons exprimé $\log(1+z)$, qu'en deux points infiniment voisins z et z' de la ligne d'indétermination BN (fig 41) on a :

$$(z') - (z) = 2i\pi.$$

Voici maintenant les conséquences à tirer des considérations que nous venons d'exposer.

On voit d'abord que d'après la nouvelle définition, la fonction arctg z est finie, continue et uniforme à l'intérieur d'une circonférence dont le centre est à l'origine et le rayon égal à l'unité. Nous pouvons donc employer la formule de Maclaurin, et conclure que la série

$$\operatorname{arc\,tg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots\ldots$$

a lieu pour toutes les valeurs réelles ou imaginaires de la variable dont le module est plus petit que un.

Je montrerai ensuite comment on est conduit aux déterminations multiples de arc tg z.

Imaginons entre les points z_1 et z_0 un chemin $z_1 P z_0$ (fig. 40) qui ne rencontre point la droite AM. On aura le long d'un tel chemin une succession absolument continue de valeurs de la fonction. Concevons maintenant qu'en s'assujétissant à conserver la loi de continuité, on veuille aller au-delà de z_0 et revenir au point de départ z_1. Il est clair qu'il faudra prendre, en retrouvant le point z_1, la valeur de la fonction appartenant à z_0 qui en est infiniment voisine, c'est-à-dire la quantité désignée par (z_0) qui est égale à $z_1 - \pi$. Supprimer la ligne de discontinuité AM, c'est donc donner naissance, en un même point z_1, à deux déterminations, puis à un nombre quelconque n, en décrivant n fois le même contour, ces déterminations étant comprises dans la formule $(z_1) - n\pi$. La seconde coupure A'M' conduit semblablement aux déterminations représentées par $(z'_1) + n\pi$. il est facile de conclure qu'en tout point du plan, et non seulement en z_1 et z'_1, on a les valeurs en nombre illimité de arc tang z qui résultent de l'addition ou de la soustraction d'un multiple entier de π.

Les considérations précédentes donnent l'exemple d'un genre de discontinuité dont on n'aurait pu acquérir l'idée en restant dans le domaine de l'analyse élémentaire.

Les fractions, par exemple deviennent infinies et par conséquent discontinues pour les valeurs de la variable qui annulent le dénominateur, et ces valeurs représentent des points isolés du plan. D'autres expressions qui se tirent de la série de Fournier passent brusquement d'une série de valeurs finies à une autre entièrement différente lorsque la variable varie en croissant d'une manière continue. Mais ces changements correspondent à des valeurs séparées par des intervalles finis, tandis que nous venons de trouver des lignes indéfinies de discontinuité. Une remarque à laquelle donne lieu la formule de Cauchy.

$$f(x) = \frac{1}{2i\pi}\int_S \frac{f(z)\,dz}{z-x}$$

va nous montrer sous un point de vue nouveau et beaucoup plus général cette extension de la notion de discontinuité, et fera juger de son importance en analyse. Supposons le point dont l'affixe est la variable x à l'extérieur de la courbe S, la fonction $\frac{f(z)}{z-x}$ remplit dans cette hypothèse la condition d'être finie pour tous les points de son intérieur, par conséquent l'intégrale $\frac{1}{2i\pi}\int\frac{f(z)\,dz}{z-x}$ est nulle.

Le contour d'intégration est donc une ligne de discontinuité; ou bien encore ce que Riemann nomme une coupure; et voici en terminant un nouvel exemple de l'emploi de cette notion qui joue un si grand rôle dans les travaux du grand géomètre.

Soit en général:

$$(S)_k = \int_S \frac{f_k(z)\,dz}{z-x}\;;$$

considérons un nombre quelconque d'aires séparées limitées par des contours $S, S', S'', \ldots$ et posons:

$$\Phi(x) = (S) + (S')_1 + (S'')_2 + \cdots\cdots$$

les fonctions $f(z), f_1(z), f_2(z), \ldots\ldots$ étant quelconques. D'après ce que nous avons dit plus haut, si le point x est à l'intérieur du contour S, $\Phi(x)$ sera égale à la fonction $f(x)$; si le point x est à l'intérieur du contour S_1, $\Phi(x)$ sera égale à la fonction $f_1(x)$, et ainsi de suite. Ainsi, au moyen d'intégrales curvilignes, on forme une expression analytique entièrement explicite, qui représente successivement $f(x), f_1(x)$ quand x appartient à certaines régions données du plan, les fonctions $f(x), f_1(x) \ldots\ldots$ étant complètement indépendantes les unes des autres. Je me borne à indiquer succinctement ce résultat pour montrer comment se modifie et s'étend l'idée de fonction, en tant qu'elle résulte des faits offerts par les combinaisons que l'analyse soumet à notre observation et à nos recherches.

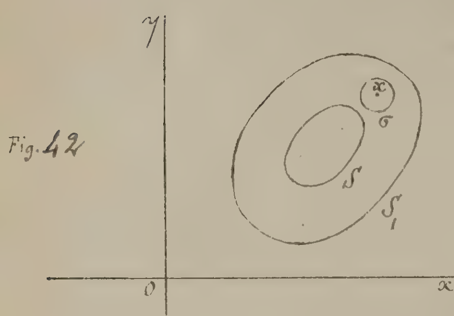
10e Leçon.

Le théorème de Cauchy dont nous venons de tirer les séries de Taylor et de

Maclaurin, donne l'expression d'une fonction $f(x)$, supposée uniforme et continue dans une aire limitée par le contour S, au moyen de la formule.

$$f(x) = \frac{1}{2i\pi}\int_S \frac{f(z)\,dz}{z-x}$$

Considérons maintenant une aire limitée par deux contours S et S_1 (fig 42) et admettons qu'en tous ses points la fonction $f(z)$ soit de même uniforme et continue, voici dans ce cas plus général comment on en obtient l'expression. Soit x l'affixe d'un point de l'aire et σ une circonférence de rayon infiniment petit ayant ce point pour centre. Dans l'aire limitée par les trois courbes S, σ, S_1 la quantité $\frac{f(z)}{z-x}$ est uniforme et continue, par conséquent l'intégrale $\int \frac{f(z)\,dz}{z-x}$ est nulle, si on la prend successivement en suivant ces divers contours, et qu'on remplisse la condition précédemment donnée, de les décrire en ayant à gauche l'aire considérée. Il en résulte qu'en suivant chaque courbe dans le sens direct par rapport à l'aire qu'elle enveloppe, la valeur de l'intégrale est donnée par l'expression:



$$(S_1) - (\sigma) - (S).$$

On a donc la relation:

$$(\sigma) = (S_1) - (S),$$

et comme $(\sigma) = 2i\pi f(x)$, on en conclut la formule suivante:

$$f(x) = \frac{1}{2i\pi}\int_{S_1}\frac{f(z)\,dz}{z-x} - \frac{1}{2i\pi}\int_S \frac{f(z)\,dz}{z-x}$$

ou plutôt:

$$f(x) = \frac{1}{2i\pi}\int_{S_1}\frac{f(z)\,dz}{z-x} + \frac{1}{2i\pi}\int_S \frac{f(z)\,dz}{x-z}$$

qui est une généralisation de celle de Cauchy; voici une conséquence importante à laquelle elle conduit:

Supposons que S et S_1 soient deux circonférences de rayon R et R_1 ayant pour centre l'origine des coordonnées, nous pourrons alors développer en série les deux intégrales, la première suivant les puissances croissantes et la seconde suivant les puissances descendantes de la variable.

Employons, en effet, la relation:

$$\frac{1}{z-x} = \frac{1}{z} + \frac{x}{z^2} + \cdots\cdots + \frac{x^{n-1}}{z^n} + \frac{x^n}{z^n(z-x)}$$

nous en conclurons l'expression de la quantité $\int_{S_1}\frac{f(z)\,dz}{z-x}$, par une fonction entière en x du degré $n-1$, avec le terme complémentaire $\frac{1}{2i\pi}\int_{S_1}\frac{x^n f(z)\,dz}{z^n(z-x)}$. Or on a, en désignant par ζ l'affixe d'un point de contour d'intégration qui est la circonférence de rayon R_1 et par λ le facteur de M. Darboux.

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{S_1}\frac{x^n f(z)\,dz}{z^n(z-x)} = \lambda R_1 \left(\frac{x}{\zeta}\right)^n \frac{f(\zeta)}{\zeta - x}$$

Le module de $\frac{x}{\zeta}$ étant moindre que l'unité, il en résulte que pour les valeurs suffisamment grandes de n, le reste de la série peut devenir moindre que toute quantité donnée.

En employant en second lieu l'équation:

$$\frac{1}{x-z} = \frac{1}{x} + \frac{z}{x^2} + \cdots\cdots + \frac{z^{n-1}}{x^n} + \frac{z^n}{x^n(x-z)} ;$$

la seconde intégrale sera développée suivant les puissances descendantes de la variable, le terme complémentaire étant $\frac{1}{2i\pi}\int_s \frac{z^n f(z)dz}{x^n(x-z)}$, ou bien encore si l'on désigne par ζ l'affixe d'un point de la circonférence de rayon R.

$$\lambda R \left(\frac{\zeta}{x}\right)^n \frac{f(\zeta)}{x-\zeta}$$

Maintenant c'est le facteur $\frac{\zeta}{x}$ dont le module est inférieur à l'unité, de sorte que ce second reste comme le précédent à zéro pour limite, lorsque n croît indéfiniment.

La proposition que nous venons d'établir et qu'on nomme le théorème de Laurent(*) ouvre l'étude qui va maintenant nous occuper des fonctions uniformes d'une variable. Lorsque ces fonctions sont finies dans tout le plan, la formule de Maclaurin en donne l'expression par une série convergente quelle que soit la variable. Si l'on admet qu'elle deviennent infinies pour diverses valeurs que nous désignons par $a_0, a_1, \ldots a_k, \ldots\ldots$ en supposant:

$$\text{Mod.}\, a_0 < \text{Mod.}\, a_1 < \text{Mod.}\, a_2 \ldots\ldots\ldots < \text{Mod.}\, a_k \ldots\ldots$$

le théorème de Laurent donne p.r l'intervalle compris entre deux circonférences ayant leur centre à l'origine; et qui passent par les points a_{k-1} et a_k, un développement d'une autre forme convergent dans cet espace, mais non sur les courbes qui le limitent, où entrent des puissances positives et négatives de la variable:

$$S_k = A_0^k + A_1^k x + A_2^k x^2 + \cdots\cdots$$
$$+ \frac{B_1^k}{x} + \frac{B_2^k}{x^2} + $$

Joignons maintenant à ces quantités la série de Maclaurin S_0, pour les valeurs de la variable; à l'intérieur de la première des circonférences, l'ensemble des expressions $S_0, S_1, \ldots\ldots S_k$ représentera la fonction par tous les points du cercle dont le rayon est le module de a_k. Et s'il n'existe pas de discontinuités dans l'espace infini au delà de ce cercle, son expression dans cette dernière région s'obtient en supposant le rayon R_1 infiniment grand dans l'intégrale $\frac{1}{2i\pi}\int_{s_1} \frac{f(z)dz}{z-x}$ qui donne alors une série entière convergente pour toute valeur de la variable.

On s'est longtemps arrêté dans l'étude générale des fonctions uniformes à ces résultats

---

(*) Voir T. 17 des Comptes-rendus, p. 938, le rapport de Cauchy sur le mémoire dans lequel Laurent a donné son théorème, et la note que le grand géomètre a jointe à son rapport.

que nous venons d'indiquer succinctement. Depuis ils ont été grandement dépassés par M. Weierstrass; notre but est d'exposer parmi les découvertes de l'illustre géomètre sur ce sujet, celles que nous avons cru nécessaire de placer dans l'enseignement. Nous considérerons d'abord les fonctions appelées holomorphes par Briot et Bouquet, qui étant finies en tous les points du plan, sont développables par la formule de Maclaurin en série convergente pour toute valeur de la variable; voici la première proposition que nous établirons à leur égard. Je dis que toute fonction holomorphe $f(z)$, telle que le rapport $\frac{f(z)}{z^n}$ soit fini pour z infiniment grand, est un polynôme entier du degré n.

A cet effet je partirai de la formule:

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1} f'(0) + \cdots\cdots + \frac{x^n}{1.2.\ldots\ldots n} f^n(0) + J$$

où l'on a:

$$J = \frac{1}{2i\pi} \int \frac{x^{n+1} f(z)\,dz}{z^{n+1}(z-x)};$$

l'intégrale étant prise le long d'une circonférence de rayon R, dont le centre est à l'origine et qui contient à son intérieur le point dont l'affixe est la variable x.

Désignons comme précédemment, par $\zeta = Re^{i\theta}$ l'affixe d'un point de cette circonférence, nous pourrons écrire:

$$J = \frac{\lambda R\, x^{n+1} f(\zeta)}{\zeta^{n+1}(\zeta - x)},$$

ou bien en mettant $\zeta e^{-i\theta}$ au lieu de R, et faisant entrer l'exponentielle $e^{-i\theta}$ dans le facteur λ:

$$J = \frac{\lambda\, x^{n+1} f(\zeta)}{\zeta^n(\zeta - x)}$$

Cela étant, comme la fonction $f(z)$ est supposée holomorphe, on peut sans changer la valeur de l'intégrale, augmenter au-delà de toute limite le rayon de la circonférence qui sert de contour d'intégration. Le rapport $\frac{f(\zeta)}{\zeta^n}$ ayant une limite finie, nous prouvons ainsi que la quantité J est nulle, ce qui démontre la proposition énoncée. En particulier, si l'on suppose $n=0$, on remarquera cette conséquence qu'une fonction holomorphe doit croître indéfiniment avec la variable; en admettant qu'elle ne puisse dépasser une limite finie, elle serait nécessairement une constante. Les fonctions holomorphes transcendantes ont donc un caractère qui les distingue essentiellement des polynômes, et leur décomposition en facteurs que nous allons bientôt aborder, mettra en pleine évidence la différence de la nature analytique des deux genres de quantité. Nous nous fonderons pour traiter cette question sur la proposition suivante de M. Neumann, qui est d'une grande importance en analyse: « Une fonction holomorphe dans une aire donnée, qui est constante le long d'une ligne de grandeur finie, a nécessairement cette même valeur constante dans toute l'étendue de l'aire ».

Soit (fig. 43) MN la ligne de grandeur finie aussi petite qu'on le veut, le long de laquelle $f(z)$ a la valeur constante c. Prenons un point A sur cette ligne, comme

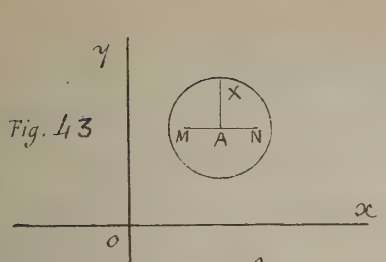


Fig. 43

centre d'une circonférence de rayon AX, que nous supposerons contenue dans l'aire considérée. En désignant par x l'affixe de X et par a l'affixe de A, le théorème de Taylor que nous pouvons appliquer dans cette circonstance nous donne :

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1}(x-a) + \frac{f''(a)}{1.2}(x-a)^2 + \dots\dots$$

Or on a en tous les points de MN $f(z) = c$; il en résulte que les dérivées d'ordre quelconque de la fonction sont nulles le long de cette ligne et par conséquent au point A, de sorte que la série nous donne $f(x) = 0$ pour $x = a$. La fonction est donc constante à l'intérieur de la circonférence ; cela étant nous partirons d'un point A' situé dans le cercle AX, pour répéter le même raisonnement, puis d'un point A'' dans le nouveau cercle obtenu, et il est clair que de proche en proche, et dans toute l'étendue de l'aire où la fonction est holomorphe, nous démontrons ainsi que l'on a $f(x) = C$.

Voici les conséquences que M. Neumann déduit de ce théorème.

Une fonction holomorphe ne pouvant être nulle le long d'une ligne de grandeur finie sans se réduire à zéro identiquement, on en conclut que les valeurs de la variable pour lesquelles elle s'évanouit sont nécessairement des points isolés.

Supposons ensuite que $f(x)$ et ses $n-1$ premières dérivées s'annulent pour $x = a$, la dérivée d'ordre n prenant une valeur différente de zéro, la série de Taylor nous donne l'expression suivante :

$$f(x) = (x-a)^n F(x)$$

où $F(x)$ est encore une fonction holomorphe. On dit alors, comme dans le cas des polynômes de l'algèbre, que cette valeur $x = a$ est une racine d'ordre de multiplicité n de l'équation $f(x) = 0$. Nous ajoutons qu'il est impossible qu'une fonction holomorphe ait une racine dont l'ordre de multiplicité serait infini, la série de Taylor, montre, en effet, qu'en admettant une telle supposition, la fonction serait identiquement nulle.

Ces résultats nous conduisent naturellement à chercher si une fonction holomorphe ne serait pas susceptible d'une décomposition en facteurs, comme les polynômes, et qui mettrait en évidence ses racines en nombre fini ou infini.

Avant qu'on ait traité en général cette question aussi importante que difficile, quelques cas particuliers avaient été considérés. Ainsi Euler avait donné la formule célèbre :

$$\frac{\sin \pi x}{\pi x} = \left(1 - \frac{x^2}{1}\right)\left(1 - \frac{x^2}{4}\right) \dots\dots \left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right) \dots\dots$$

qui a lieu pour toute valeur de x.

Cauchy le premier s'est occupé de ce sujet, à un point de vue général, sans parvenir encore à une théorie complète, il a reconnu que a désignant une racine de la fonction $f(x)$, au produit des quantités telles que $1 - \frac{x}{a}$ il fallait, dans certains cas, adjoindre un facteur de la forme $e^{G(x)}$ dans lequel $G(x)$ représente une fonction holomorphe et qui, par conséquent, ne s'annule pour aucune valeur de x.

C'est M. Weierstrass qui ensuite a traité complètement le problème dans un mémoire intitulé : Sur la théorie des fonctions uniformes d'une variable ; dont on trouvera la traduction par M. Picard dans les Annales de l'École Normale (1879). Par une méthode savante et profonde, l'illustre géomètre parvient à des résultats d'une importance capitale que nous exposerons d'une manière plus simple, à l'aide d'une considération ingénieuse et originale qui est due à M. Mittag-Leffler, professeur à l'Université de Stockholm.

Nous désignerons par $a_1, a_2, a_3, \ldots\ldots$ les racines de la fonction holomorphe $f(x)$, rangées par ordre de modules croissants. Nous les supposerons toutes différentes et nous admettrons qu'il n'y en ait point d'égale à zéro.

Cela étant, voici d'abord un cas dans lequel la décomposition en facteur se rapproche le plus possible de celle qui est propre aux polynômes.

Supposons que la suite $\Sigma \frac{1}{\mathrm{mod}\, a_n}$ formée avec les inverses des modules des racines soit convergente, je dis qu'il en sera de même de la série $\Sigma \frac{1}{\mathrm{mod}(a_n - x)}$ quelque soit x, sauf les valeurs $a_1, a_2, \ldots$ qui la rendent infinie, de sorte que l'expression $\Sigma \frac{1}{x - a_n}$ représentera dans tous le plan une fonction analytique de la variable.

J'emploierai pour le faire voir cette remarque fort simple qu'étant donné deux séries Σu_n et Σv_n dont la première est supposée convergente, la seconde le sera pareillement, si l'on a en désignant par k une constante :

$$v_n < k u_n,$$

pour toutes les valeurs de n à partir d'une certaine limite.

Soit en effet,

$$u_n = \frac{1}{\mathrm{mod}\, a_n} \text{ et } v_n = \frac{1}{\mathrm{mod}(a_n - x)},$$

la condition précédente devient :

$$\frac{\mathrm{Mod}\, a_n}{\mathrm{Mod}(a_n - x)} < k,$$

Or on tire de l'inégalité :

$$\mathrm{Mod}\, a_n < \mathrm{Mod}(a_n - x) + \mathrm{Mod}\, x,$$

la relation :

$$\frac{\mathrm{Mod}\, a_n}{\mathrm{Mod}(a_n - x)} < 1 + \frac{\mathrm{Mod}\, x}{\mathrm{Mod}(a_n - x)}$$

qui démontre le résultat annoncé, la quantité $\frac{\mathrm{Mod.}\, x}{\mathrm{Mod}(a_n - x)}$ décroissant indéfiniment lorsque n augmente.

Ce point établi considérons la quantité :

$$\frac{f'(x)}{f(x)} - \Sigma \frac{1}{x - a_n}$$

qui est évidemment une fonction uniforme pour tous les points du plan ; je dis

qu'elle ne devient pas infinie lorsqu'on y fait $x = a_n$.

On a en effet:

$$f(x) = (x - a_n) F(x),$$

en désignant par $F(x)$ une fonction holomorphe qui n'admet plus la racine a_n supposée simple, et de là, on conclut:

$$\frac{f'(x)}{f(x)} - \frac{1}{x - a_n} = \frac{F'(x)}{F(x)},$$

quantité finie pour $x = a_n$.

La fonction $\frac{f'(x)}{f(x)} - \Sigma \frac{1}{x - a_n}$ est donc holomorphe dans toute l'étendue du plan; nous la représenterons par $G'(x)$, en supposant que $G(x)$ s'annule pour $x = 0$; ce qui donnera:

$$\frac{f'(x)}{f(x)} - \Sigma \frac{1}{x - a_n} = G'(x).$$

Multiplions maintenant les deux membres par dx et intégrons à partir de $x = 0$ il vient ainsi:

$$\log \frac{f(x)}{f(0)} - \Sigma \log\left(1 - \frac{x}{a_n}\right) = G(x),$$

d'où:

$$\frac{f(x)}{f(0)} = e^{G(x)} \Pi\left(1 - \frac{x}{a_n}\right);$$

$\Pi\left(1 - \frac{x}{a_n}\right)$ désignant le produit d'un nombre fini ou infini de facteurs: $\left(1 - \frac{x}{a}\right)\left(1 - \frac{x}{a_2}\right) \ldots\ldots \left(1 - \frac{x}{a_n}\right) \ldots\ldots$ C'est le résultat auquel Cauchy était parvenu.

Nous allons maintenant aborder le cas général et établir, avec la méthode de M. Mittag-Leffler, les résultats importants découverts par M. Weierstrass, en observant avec l'illustre géomètre que la voie lui a été ouverte par l'expression de Gauss de l'inverse de la fonction Eulérienne de seconde espèce, sous forme d'un produit de facteurs linéaires, en nombre infini.

Lorsque la série $\Sigma \frac{1}{mod. a}$ n'est plus convergente, la somme $\Sigma \frac{1}{x - a}$ ne représente plus une fonction analytique; mais en retranchant de chaque terme une partie de son développement ordonné suivant les puissances décroissantes de x, M. Mittag-Leffler a remarqué qu'il est possible de former avec ces différences une série absolument convergente.

Soit:

$$P_\omega(x) = \frac{1}{a_n} + \frac{x}{a_n^2} + \cdots\cdots + \frac{x^{\omega - 1}}{a_n^\omega},$$

on aura:

$$\frac{1}{x - a_n} + P_\omega(x) = \frac{x^\omega}{a^\omega (x - a_n)};$$

cela étant, je dis qu'en disposant convenablement de ω, on rendra la série $\Sigma\left[\frac{1}{x - a_n} + P_\omega(x)\right]$, ou son égale $\Sigma \frac{x^{\omega}}{a_n^\omega (x - a_n)}$ convergente.

En premier lieu, il peut arriver que la suite $\Sigma \frac{1}{mod. a}$ étant divergente, celle

qu'on forme en élevant tous ses termes à une même puissance ne le soit plus. C'est le cas de la série harmonique $\Sigma \frac{1}{n}$; on sait en effet que la somme $\Sigma \frac{1}{n^\mu}$, où μ est >1 est finie. On aura, s'il en est ainsi, un nombre fixe ω tel que la suite $\Sigma \frac{1}{\text{mod. } a_n^{\omega+1}}$ soit convergente et on en conclura la convergence de celle-ci à $\Sigma \frac{1}{\text{mod. } a_n^{\omega}(x-a_n)}$ et par conséquent de $\Sigma \frac{x^\omega}{a_n^\omega (x-a_n)}$.

Si nous faisons en effet.

$$u_n = \frac{1}{\text{mod } a_n^{\omega+1}}, \quad v_n = \frac{1}{\text{mod } a_n^{\omega}(a_n - x)}$$

on obtient pour le rapport $\frac{v_n}{u_n}$ la même valeur que précédemment

$$\frac{v_n}{u_n} = \frac{\text{mod } a_n}{\text{mod}(a_n - x)}.$$

Mais il s'en faut qu'on puisse toujours opérer de telle sorte, et passer d'une série divergente à une autre convergente, en élevant les termes de la première à une même puissance.

Considérons, par exemple, la série divergente $\Sigma \frac{1}{\log n}$, je dis que $\Sigma \frac{1}{(\log n)^\omega}$ le sera pareillement quelque grand que soit le nombre fixe ω.

Remarquons, en effet, avec M. Stern de Gottingue, qu'en posant:

$$S_n = \frac{1}{(\log 2)^\omega} + \frac{1}{(\log 3)^\omega} + \cdots + \frac{1}{(\log n)^\omega},$$

on aura:

$$S_n > \frac{n-1}{(\log n)^\omega}.$$

Or on peut écrire:

$$\frac{n-1}{(\log n)^\omega} = \frac{n}{(\log n)^\omega} - \frac{1}{(\log n)^\omega}$$

le second terme de la différence tend vers zéro et peut être négligé; mais le premier augmente sans limite avec n, comme on sait; la série est donc divergente.

Dans les cas semblables, il sera nécessaire de prendre pour ω une valeur qui change avec n; nous ferons avec M. Weierstrass $\omega = n-1$. La série considérée qui devient alors:

$$\Sigma \frac{x^{n-1}}{a_n^{n-1}(x-a_n)} = \frac{1}{x} \Sigma \frac{x^n}{a_n^n \left(1 - \frac{x}{a_n}\right)} \quad \text{est convergente,}$$

car en faisant $u_n = \text{Mod} \frac{x^n}{a_n^n \left(1 - \frac{x}{a_n}\right)}$ la limite pour n infini de l'expression $\sqrt[n]{u_n}$ est zéro, et il suffirait comme on sait, qu'elle soit inférieure à l'unité.

Ceci posé, l'expression:

$$\frac{f'(x)}{f(x)} - \Sigma \left[\frac{1}{x-a_n} + P_\omega(x) \right]$$

est une fonction analytique qui ne devient jamais infinie, comme on l'a vu tout à

l'heure. Nous pouvons, par suite, l'égaler à la dérivée $G'(x)$ d'une fonction holomorphe $G(x)$ que nous supposerons encore s'annuler pour $x=0$; ce qui donne:

$$\frac{f'(x)}{f(x)} - \Sigma\left[\frac{1}{x-a_n} + P_\omega(x)\right] = G'(x)$$

Multiplions les deux membres par dx, intégrons à partir de 0, et soit;

$$Q_\omega(x) = \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2} + \cdots\cdots + \frac{x^\omega}{\omega},$$

de sorte qu'on ait:

$$\int_0^x P_\omega(x)\, dx = \frac{x}{a_n} + \frac{x^2}{2a_n^2} + \cdots\cdots + \frac{x^\omega}{\omega a_n^\omega} = Q_\omega\left(\frac{x}{a_n}\right);$$

il vient alors

$$\log\frac{f(x)}{f(0)} - \Sigma\left[\log\left(1-\frac{x}{a_n}\right) + Q_\omega\left(\frac{x}{a_n}\right)\right] = G(x),$$

ou bien:

$$\frac{f(x)}{f(0)} = e^{G(x)}\pi\left[\left(1-\frac{x}{a_n}\right)e^{Q_\omega\left(\frac{x}{a_n}\right)}\right].$$

Telle est la formule découverte par M. Weierstrass, donnant pour toutes les fonctions holomorphes l'expression analytique qui permet de mettre en évidence leurs racines, et de généraliser la décomposition des polynômes en facteurs. Les quantités $\left(1-\frac{x}{a}\right)e^{Q_\omega\left(\frac{x}{a}\right)}$, qui figurent dans cette expression ont été nommés facteurs primaires par l'illustre géomètre.

Si nous supposons maintenant que $f(x)$ ait des racines égales, soit à une racine d'ordre p de multiplicité; on voit immédiatement que la formule ne subit aucune modification analytique, il suffira d'élever le facteur primaire correspondant à la puissance p. Enfin, dans le cas où la fonction admettrait n racines nulles on raisonnerait sur le quotient $\frac{f(x)}{x^n}$, et le résultat ne différerait du précédent que par la présence du facteur x^n.

A l'égard de l'exponentielle $e^{G(x)}$, nous remarquerons qu'elle donne l'exemple d'une fonction holomorphe n'admettant aucune racine. C'est ce qui a conduit M. Picard à rechercher s'il existe des fonctions $f(x)$ telles que deux équations $f(x)=a$, $f(x)=b$ n'auraient ni l'une ni l'autre aucune racine. L'auteur a établi dans les Annales de l'Ecole Normale, que $f(x)$, supposé holomorphe, est alors nécessairement une constante. Et si les équations considérées n'ont qu'un nombre fini de solutions, cette fonction ne peut être qu'un polynôme. Nous employerons ces résultats, qui seront démontrés plus tard dans la théorie des fonctions elliptiques, théorie qui s'établit indépendamment de celle qui nous occupe en ce moment.

Nous allons actuellement appliquer les propositions que nous venons d'obtenir au cas particulier de $\sin x$ et parvenir ainsi à la formule d'Euler, par des considérations élémentaires. Considérons la fonction holomorphe $\frac{\sin\pi x}{\pi x}$ qui a pour racines $x=n$, n représentant la suite des nombres entiers positifs et négatifs, sauf zéro,

la série considérée plus haut $\sum \frac{1}{\mathrm{mod.}\, a_n}$ est donc divergente; mais celle-ci $\sum \frac{1}{\mathrm{mod}^2 a_n}$ ne l'est plus; nous prendrons par conséquent $\omega = 1$. Les facteurs primaires sont ainsi: $\left(1 - \frac{x}{n}\right) e^{\frac{x}{n}}$; en remarquant que $f(0) = 1$, et admettant ce qui sera bientôt établi, que $G(x) = 0$, on a la formule:

$$\frac{\sin \pi x}{\pi x} = \Pi \left(1 - \frac{x}{n}\right) e^{\frac{x}{n}}$$

$$(n = \pm 1.\ \pm\ 2.\ \pm\ 3.....)$$

Si on réunit les deux facteurs qui correspondent aux valeurs de n égales et de signes contraires, les exponentielles disparaissent, et l'on obtient finalement:

$$\frac{\sin \pi x}{\pi x} = \left(1 - \frac{x^2}{1}\right)\left(1 - \frac{x^2}{4}\right) \ldots\ldots \left(1 - \frac{x^2}{n}\right) \ldots,$$

c'est à dire la formule d'Euler.

Nous remarquerons qu'elle met immédiatement en évidence aussi bien que la définition géométrique, la périodicité du sinus.

Ecrivons, en effet, en prenant un nombre fini de facteurs, et désignant par A une constante.

$$F(x) = A x (x-1)(x-2) \ldots (x-n)$$
$$(x+1)(x+2) \ldots (x+n)$$

Changeons x en $x+1$, il vient:

$$F(x+1) = A(x+1)\, x\, (x-1) \ldots (x-n+1)$$
$$(x+2)\ (x+3) \ldots (x+n+1),$$

on a donc:

$$F(x+1) = F(x) \frac{x+n+1}{x-n}$$

et à la limite, pour $n = \infty$:

$$F(x+1) = -F(x);$$

ce qui donne la relation:

$$\sin(x + \pi) = -\sin x,$$

et par conséquent.

$$\sin(x + 2\pi) = \sin x.$$

Nous ferons encore au sujet de l'expression d'Euler, la remarque suivante.

On pourrait penser qu'il est permis d'écrire:

$$\frac{\sin \pi x}{\pi} = x\left(1 - \frac{x}{1}\right)\left(1 - \frac{x}{2}\right) \ldots \left(1 - \frac{x}{n}\right)\left(1 + \frac{x}{1}\right)\left(1 + \frac{x}{2}\right) \ldots \left(1 + \frac{x}{m}\right)$$

les nombres m et n croissant indéfiniment, et par conséquent de substituer au polynôme:

$$F(x) = x\left(1 - \frac{x}{1}\right)\left(1 - \frac{x}{2}\right) \ldots \left(1 - \frac{x}{n}\right)$$
$$\left(1 + \frac{x}{1}\right)\left(1 + \frac{x}{2}\right) \ldots \left(1 + \frac{x}{n}\right)$$

le suivant:

$$\Phi(x) = x\left(1 - \frac{x}{1}\right)\left(1 - \frac{x}{2}\right) \ldots \left(1 - \frac{x}{n}\right)$$
$$\left(1 + \frac{x}{1}\right)\left(1 + \frac{x}{2}\right) \ldots \left(1 + \frac{x}{m}\right)$$

mais l'expression de M. Weierstrass montre que l'on commettrait une erreur.

Si l'on pose pour abréger :

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \dots + \frac{1}{n},$$

cette formule donne, en effet :

$$\frac{\sin \pi x}{\pi} = \Phi(x) e^{x(S_n - S_m)},$$

m et n croissant indéfiniment. Or on a, pour m et n très-grands :

$$S_n - S_m = \log \frac{n}{m},$$

et l'on en conclut la valeur suivante :

$$\Phi(x) = \frac{\sin \pi x}{\pi} \left(\frac{m}{n}\right)^x.$$

La limite du produit des facteurs linéaires représenté par $\Phi(x)$ est par conséquent la limite du polynôme $F(x)$ multipliée par le facteur exceptionnel $\left(\frac{m}{n}\right)^x$. C'est ce qui s'accorde avec l'égalité :

$$\Phi(x+1) = \Phi(x) \frac{m+1+x}{x-n},$$

d'où l'on conclut, en effet, en faisant grandir les nombres m et n :

$$\Phi(x+1) = -\Phi(x) \lim. \left(\frac{m}{n}\right);$$

ce n'est donc que dans le cas particulier, où la limite du rapport $\frac{m}{n}$ égale l'unité qu'on obtient le polynôme entier servant d'origine à une fonction périodique.

L'expression de $\cos x$ sous forme d'un produit de facteurs primaires s'obtient facilement comme conséquence de la relation,

$$\cos x = \frac{\sin 2x}{2 \sin x}$$

Changeons à cet effet x en $\frac{x}{\pi}$ dans la formule précédente, ce qui donne,

$$\sin x = x \Pi \left[\left(1 - \frac{x}{n\pi}\right) e^{\frac{x}{n\pi}} \right],$$

réunissons ensuite les facteurs correspondant aux valeurs paires et aux valeurs impaires de n, on pourra écrire :

$$\sin x = x \Pi \left[\left(1 - \frac{x}{2n\pi}\right) e^{\frac{x}{2n\pi}} \right]$$

$$\times \Pi \left[\left(1 - \frac{2x}{m\pi}\right) e^{\frac{2x}{m\pi}} \right]$$

$$(m = \pm 1, \pm 3, \pm 5 \dots\dots)$$

De cette manière se trouvent mis en évidence dans $\sin 2x$ tous les facteurs de $\sin x$, et en simplifiant il vient :

$$\cos x = \Pi \left[\left(1 - \frac{2x}{m\pi}\right) e^{\frac{2x}{m\pi}} \right]$$

Mais on peut se proposer de parvenir à ce résultat au moyen de la relation $\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)$; il convient pour cela d'employer l'expression générale de $f(x+\xi)$ où ξ est une constante quelconque qui s'obtient facilement.

Soit pour un moment $f(x+\xi) = F(x)$ ce qui donne,

$$\frac{F(x)}{F(0)} = \frac{f(x+\xi)}{f(\xi)}$$

en observant que les racines de l'équation $F(x)=0$ sont les quantités $a_n - \xi$ nous aurons la formule :

$$\frac{f(x+\xi)}{f(\xi)} = e^{G(x)}\Pi\left[\left(1-\frac{x}{a_n-\xi}\right)e^{\varrho\omega\left(\frac{x}{a_n-\xi}\right)}\right]$$

et l'on en tire l'expression précédente de $\cos x$, si l'on suppose $a_n = n\pi$ $\xi = \frac{\pi}{2}$ et $G(x)=0$.

Ce résultat paraîtrait devoir se conclure des deux relations :

$$\frac{f(x+\xi)}{f(0)} = e^{G(x+\xi)}\Pi\left[\left(1-\frac{x+\xi}{a_n}\right)e^{\varrho\omega\left(\frac{x+\xi}{a_n}\right)}\right]$$

et

$$\frac{f(\xi)}{f(0)} = e^{G(\xi)}\Pi\left[\left(1-\frac{\xi}{a_n}\right)e^{\varrho\omega\left(\frac{\xi}{a_n}\right)}\right]$$

en divisant membre à membre, mais on trouve ainsi la nouvelle expression :

$$\frac{f(x+\xi)}{f(\xi)} = e^{G(x+\xi)-G(\xi)}\Pi\left[\left(1-\frac{x}{a_n-\xi}\right)e^{\varrho\omega\left(\frac{x+\xi}{a_n}\right)-\varrho\omega\left(\frac{\xi}{a_n}\right)}\right]$$

J'y joindrai une autre qu'on obtient en partant de l'égalité suivante où le facteur x est mis en évidence :

$$\frac{f(x)}{f(0)} = e^{G(x)}\,x\,\Pi\left[\left(1-\frac{x}{a_n}\right)e^{\varrho\omega\left(\frac{x}{a_n}\right)}\right]$$

C'est celle-ci :

$$\frac{f(x+\xi)}{f(\xi)} = e^{G(x+\xi)-G(\xi)}\left(1+\frac{x}{\xi}\right)\Pi\left[\left(1-\frac{x}{a_n-\xi}\right)e^{\varrho\omega\left(\frac{x+\xi}{a_n}\right)-\varrho\omega\left(\frac{\xi}{a_n}\right)}\right]$$

que j'appliquerai au cas de $\sin x$ et qui donne en faisant $\xi = \frac{\pi}{2}$ et $m = 2n-1$, la formule :

$$\cos x = \left(1+\frac{2x}{\pi}\right)\Pi\left[\left(1-\frac{2x}{m\pi}\right)e^{\frac{x}{n\pi}}\right]$$

On voit combien elle est différente de celle que nous avons précédemment donnée et il importe de reconnaître directement que les deux quantités sont égales ; voici pour cela une méthode simple et élégante qui est due à M.r Edouard Weyr professeur à l'école Polytechnique de Prague (Bulletin des Sciences Mathématiques, 2me Série Tome XII, Janvier 1888).

Ecrivons d'abord, dans la première valeur de $\cos x$ $2n-1$ au lieu de m et mettons à part le facteur qui correspond à $n=0$, nous aurons ainsi.

$$\cos x = \left(1+\frac{2x}{\pi}\right)e^{-\frac{2x}{\pi}}\,\Pi\left[\left(1-\frac{2x}{(2n-1)\pi}\right)e^{\frac{2x}{(2n-1)\pi}}\right]$$

$$(n = \pm 1, \pm 2, \ldots\ldots\ldots)$$

Divisons maintenant par la seconde expression, où l'on exclut de même la valeur $n=0$;

$$\cos x = \left(1+\frac{2x}{\pi}\right)\Pi\left[\left(1-\frac{2x}{(m-1)\pi}\right)e^{\frac{x}{n\pi}}\right]$$

le quotient sera :

$$e^{-\frac{2x}{\pi}}\,\Pi\left[e^{\frac{2x}{(2n-1)\pi}-\frac{x}{n\pi}}\right]=e^{-\frac{2x}{\pi}+\frac{2x}{\pi}S}$$

en posant pour abréger :

$$S=\Sigma\left[\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}\right]$$
$$(n=\pm 1,\ \pm 2 \ldots\ldots)$$

Il suffira par conséquent de montrer que la somme S est égale à l'unité, pour prouver l'égalité des deux expressions. A cet effet j'observe qu'en changeant n en $-n$, le terme général devient : $-\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n}$, on peut donc limiter la sommation aux valeurs positives et écrire en ajoutant les deux quantités

$$S=\Sigma\left[\frac{1}{2n-1}-\frac{A}{2n+1}\right]$$

$$S=\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)+\cdots$$

et par conséquent $S=1$, comme il fallait l'obtenir.

La remarque suivante qui est fort simple fera voir qu'en général les facteurs primaires ne sont point déterminés d'une seule et unique manière. Soit en effet $F_1(x), F_2(x), \ldots F_n(x)$ des polynômes ayant pour somme une fonction holomorphe $F(x)$; on pourra écrire :

$$\frac{f(x)}{f(0)}=e^{G(x)-F(x)}\,\Pi\left[\left(1-\frac{x}{a_n}\right)e^{Q\omega\left(\frac{x}{a_n}\right)+F_n(x)}\right]$$

Et en particulier si nous désignons par $A_1, A_2, A_n, \ldots$ des constantes dont la somme soit A nous aurons :

$$\frac{f(x)}{f(0)}=e^{G(x)-AF(x)}\,\Pi\left[\left(1-\frac{x}{a_n}\right)e^{Q\omega\left(\frac{x}{a_n}\right)+A_nF(x)}\right]$$

$F(x)$ représentant un polynôme arbitraire.

Nous terminerons par quelques remarques sur cette classe particulière de fonctions holomorphes $f(x)$ dans lesquelles le nombre ω est le même pour tous les facteurs primaires. C'est le cas où la série $\Sigma\frac{1}{\operatorname{mod} a_n}$ devient convergente en élevant ses termes à une même puissance $\omega+1$; on leur donne alors la désignation qui a été proposée par Laguerre, de fonctions du genre ω. Soit, $1, \varepsilon, \varepsilon', .$ les diverses racines de l'équation $x^{\omega+1}=1$, le produit suivant :

$$f(x)\,f(\varepsilon x)\,f(\varepsilon' x)\ \ldots\ldots$$

sera une fonction entière de $x^{\omega+1}$, et en la représentant par $F(x^{\omega+1})$, il est clair que l'équation $F(x)=0$, ayant pour racines les quantités $a_n^{\omega+1}$, la fonction holomorphe

$F(x)$ sera du genre zéro. On voit ainsi que toute fonction du genre ω est un diviseur d'une autre plus simple de genre zéro dans laquelle on a remplacé x par $x^{\omega+1}$.

Leurs développements en série ont été le sujet des recherches de Mr Poincaré, et voici le beau résultat auquel est parvenu l'éminent géomètre (Bulletin de la société mathématique de France, T. XI, n° 4). Ces fonctions étant mises sous la forme:

$$\Sigma \frac{A_n x^n}{(1.2..n)^{\frac{1}{\omega+1}}},$$

la limite du coefficient A_n est nulle pour n infini.

Nous indiquerons enfin, dans le cas où les quantités a_n sont réelles, l'extension du théorème de Rolle aux fonctions du premier genre qui a été obtenue par Laguerre. On a alors en supposant que la fonction $G(x)$ se réduise à une constante, l'expression:

$$\frac{f(x)}{f(0)} = \Pi\left[\left(1-\frac{x}{a_n}\right)e^{\frac{x}{a_n}}\right],$$

d'où se tire les égalités suivantes

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \Sigma\left[\frac{1}{x-a_n}+\frac{1}{a_n}\right]$$

$$D_x\left[\frac{f'(x)}{f(x)}\right] = -\Sigma\frac{1}{(x-a_n)^2}$$

Or la première montre qu'entre deux racines consécutives a_n et a_n+1 de l'équation $f(x)=0$, il existe une racine de la dérivée $f'(x)$, et il résulte de la seconde égalité que cette racine est unique.

J'ajoute que l'équation $f'(x)=0$ n'a point de racines imaginaires : c'est ce que prouve immédiatement la méthode suivante, due à un géomètre italien du plus rare mérite, Felix Chio, enlevé à la science par une mort prématurée.

Posons $x=\alpha+i\beta$ dans l'équation précédente:

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \Sigma\left(\frac{1}{x-a_n}+\frac{1}{a_n}\right),$$

et mettons en évidence la partie réelle et le coefficient de i dans le second membre:

$$\frac{f'(\alpha+i\beta)}{f(\alpha+i\beta)} = \Sigma\left[\frac{\alpha-a_n}{(\alpha-a_n)^2+\beta^2}+\frac{1}{a_n}\right]+i\beta\ \frac{1}{(\alpha-a)^2+\beta^2}$$

on obtient immédiatement la condition:

$$\beta\,\Sigma\frac{1}{(\alpha-a_n)^2+\beta^2} = 0,$$

qui ne peut être satisfaite qu'en faisant $\beta=0$, tous les termes de la serie étant positifs.

Laguerre a fait voir de plus qu'une fonction $f(x)$ holomorphe des deux premiers genres, ayant toutes ses racines réelles, sa dérivée appartient nécessairement aux mêmes genres. Dans cette supposition, en effet, la série $\Sigma\frac{1}{\text{mod}^2 a}$ est convergente;

or les racines de la dérivée sont comprises entre les racines de la fonction ; donc la série analogue relative aux racines de la dérivée est aussi convergente, et par suite $f'(x)$ est du genre zéro ou un (*)

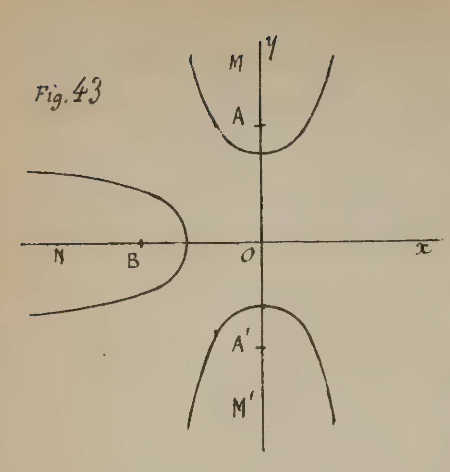
11ème Leçon.

Les considérations précédentes ont montré à la fois l'analogie et la dissemblance, dans leurs propriétés fondamentales, des fonctions holomorphes transcendantes et des simples polynômes. Avant d'aborder l'étude des fonctions uniformes qui ne sont plus holomorphes, je ferai encore une remarque sous le même point de vue, au sujet de cette proposition élémentaire que deux polynômes de degré n égaux pour $n+1$ valeurs de la variable sont identiques : Le théorème concernant les transcendantes qu'on peut en rapprocher, consiste en ce que deux fonctions holomorphes U et V, égales en tous les points d'une ligne de grandeur finie, aussi petite qu'on le veut, sont de même identiques ; c'est un cas particulier d'une importante proposition de Riemann, dont nous nous occuperons plus tard ; on l'obtient immédiatement en remarquant que la différence U-V étant égale à zéro le long d'une ligne, est nécessairement nulle dans tout le plan, comme l'a établi M. Neumann. Mais ce théorème a lieu pour des fonctions qui peuvent être holomorphes, seulement dans une portion du plan ; il conduit ainsi à d'importantes conséquences que j'indiquerai succinctement. Nous avons vu dans la leçon précédente que l'intégrale $\int_0^1 \frac{z\,dt}{1+z^2t^2}$ donnait l'extension à des valeurs imaginaires de la quantité arc tg x que la géométrie définit seulement pour des valeurs réelles de la variable, on doit par conséquent se demander si cette extension ne peut se faire que d'une seule manière :

Imaginons deux courbes (fig 43) comprenant dans leurs branches infinies les portions illimitées AM et A'M' de l'axe des y qui sont les coupures de l'intégrale en supposant $AM = A'M' = 1$.

On sépare au moyen de ces lignes deux régions du plan en dehors desquelles l'intégrale est une fonction uniforme et holomorphe. Dans cet espace le théorème de Riemann est applicable et montre par suite qu'il n'existe pas d'autre quantité ayant le caractère analytique de fonction holomorphe et égale dans le domaine des valeurs réelles à arc tg x. L'intégrale $\int_0^1 \frac{z\,dt}{1+zt}$ qui a donné

(*) Voir, dans le T. 99 des Comptes-rendus, deux articles, l'un de Laguerre sur le genre de quelques fonctions entières, p. 79 et le second de M. E. Cesaro, sur les fonctions holomorphes de genre quelconque, p. 26.



l'extension de $\log(1+x)$ nous conduit à la même conclusion, en isolant la coupure qui est alors la partie négative de l'axe des x (fig 43), à partir d'une distance de l'origine $OB=1$. Enfin j'observerai que les courbes comprenant les coupures peuvent être réduites à un système de deux droites parallèles infiniment voisines reliées par un contour infiniment petit tracé autour des points A, A' et B. On voit suffisamment par ces résultats l'importance de la proposition de Riemann, mais afin de familiariser avec les considérations qui viennent d'être employées, j'indiquerai encore l'application suivante du même théorème dont je dois la communication à Laguerre.

Considérons l'intégrale définie :

$$K = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$$

comme une fonction de k^2. Pour toutes les valeurs réelles ou imaginaires de cette quantité, dont le module est inférieur à l'unité, et en supposant que la variable x parcourt l'intervalle compris entre zéro et un, on peut employer dans l'intégrale la série :

$$\frac{1}{\sqrt{1-k^2x^2}} = 1 + \frac{1}{2}k^2x^2 + \frac{1.3}{2.4}k^4x^4 + \dots + \frac{1.3.5\dots 2n-1}{2.4.6\dots 2n}k^{2n}x^{2n} + \dots$$

et l'on en conclut l'expression suivante :

$$K = \Sigma \frac{1.3.5\dots 2n-1}{2.4.6\dots 2n} k^{2n} \int_0^1 \frac{x^{2n}dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

Si l'on fait usage maintenant de la valeur qui a été obtenue, page. 76

$$\int_0^1 \frac{x^{2n}dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{2} \frac{1.3.5\dots 2n-1}{2.4.6\dots 2n},$$

elle devient :

$$K = \frac{\pi}{2} \Sigma \left(\frac{1.3.5\dots 2n-1}{2.4.6\dots 2n}\right)^2 k^{2n}$$

et c'est sous cette forme qu'elle est employée dans la théorie des fonctions elliptiques. Cela étant Laguerre a fait la remarque importante que l'intégrale double

$$J = \int_0^1\int_0^1 \frac{dx\,dy}{(1-k^2x^2y^2)\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}}$$

conduit à la même suite multipliée par $\frac{\pi}{2}$. En développant, en effet, suivant les puissances de k^2, la fraction $\frac{1}{1-k^2x^2y^2}$, nous obtenons.

$$J = \Sigma \int_0^1\int_0^1 \frac{k^{2n}x^{2n}y^{2n}}{\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}}\,dx\,dy$$

et comme on a évidemment

$$\int_0^1\int_0^1 \frac{x^{2n}y^{2n}}{\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}}\,dx\,dy = \int_0^1 \frac{x^{2n}dx}{\sqrt{1-x^2}}\int_0^1 \frac{y^{2n}dy}{\sqrt{1-y^2}}$$

on en conclut immédiatement le résultat annoncé:

$$J = \frac{\pi}{2}K.$$

Ceci posé, voici comment on étend cette relation à des valeurs quelconques de k^2.

Considérons les conditions $1-k^2x^2=0$ et $1-k^2x^2y^2=0$ qui déterminent les points de ramification du radical $\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}$ et ceux où devient infinie la fonction de deux variables qui figure dans l'intégrale double. Les variables x et y parcourant l'intervalle compris entre zéro et l'unité, on voit que les valeurs de k^2 sont représentées dans les deux cas par toute la partie positive de l'axe des x, comptée depuis une distance de l'origine égale à l'unité.

Cela étant, séparons du plan, comme tout à l'heure, une aire illimitée dans un sens, qui renferme cette droite. Dans tout l'espace restant les quantités J et $\frac{\pi}{2}K$ sont des fonctions uniformes holomorphes de k^2, égales entre elles, d'après le théorème de Riemann puisqu'on a démontré qu'elles l'étaient dans une étendue finie.

Nous arrivons maintenant à l'étude des fonctions uniformes $f(z)$ ayant un nombre fini ou infini de discontinuités. Nous admettrons comme une condition essentielle que ces discontinuités n'aient lieu que pour des points isolés, séparés les uns des autres par des intervalles finis, et nous désignerons par S un contour fermé contenant un nombre quelconque de ces points ayant pour affixes les quantités $a, b, c, \ldots$. Cela étant, l'intégrale de Cauchy $\frac{1}{2i\pi}\int\frac{f(z)dz}{z-x}$, effectuée le long de S, donne de la manière la plus simple, comme l'a exposé M. Bourguet, dans un examen de doctorat, l'expression analytique de $f(x)$, pour tout point de l'intérieur de cette courbe.

Isolons d'abord les discontinuités de la quantité $\frac{fz}{z-x}$ en entourant $a, b, c, \ldots\ldots x$ de courbes infiniment petites, par exemple de circonférences ayant leurs centres en ces divers points. L'intégrale $\frac{1}{2i\pi}\int\frac{f(z)dz}{z-x}$, prise en suivant le contour de l'aire limitée par la courbe extérieure S et toutes ces circonférences, sera nulle, puisque dans une telle aire l'expression $\frac{f(z)}{z-x}$ est continue. Nous avons ainsi, en faisant usage de la notation précédemment employée, la relation:

$$(S)-(a)-(b)\ldots\ldots-(x)=0,$$

où pour chacune des intégrales les contours sont décrits dans le sens direct par rapport à l'aire qu'ils enveloppent. Voici le calcul de ces intégrales et les expressions auxquelles elles conduisent:

La première: $(S)=\frac{1}{2i\pi}\int\frac{f(z)dz}{z-x}$, a évidemment une valeur finie, à détermination unique, qui varie d'une manière continue avec x, lorsque cette quantité décrit un chemin quelconque dans l'intérieur de S; c'est par conséquent une fonction holomorphe dans l'aire limitée par le contour d'intégration, je la désignerai par $\Phi(x)$.

En passant aux suivantes $(a), (b), (c), \ldots\ldots$, considérons l'une d'elles, et écrivons :

$$(a) = -\frac{1}{2i\pi}\int\frac{f(z)\,dz}{x-z},$$

où l'on doit prendre $z = a + \rho e^{it}$, ρ étant infiniment petit et t croissant de zéro à 2π.

Remplaçons $\frac{1}{x-z}$ par l'expression identique :

$$\frac{1}{x-a} + \frac{z-a}{(x-a)^2} + \ldots\ldots + \frac{(z-a)^{n-1}}{(x-a)^n} + \frac{(z-a)^n}{(x-a)^n(x-z)};$$

on sera ainsi amené à un polynôme entier en $\frac{1}{x-a}$ du degré n et au terme complémentaire :

$$J = \frac{1}{2i\pi}\int\frac{(z-a)^n f(z)\,dz}{(x-a)^n(x-z)}$$

Cela étant, j'emploie cette expression :

$$J = \lambda\rho\frac{(\zeta-a)^n f(\zeta)}{(x-a)^n(x-\zeta)},$$

où ζ représente l'affixe d'un point du contour d'intégration. Le module de $\zeta-a$ étant ainsi la quantité ρ, qui est infiniment petite, le facteur $\left(\frac{\zeta-a}{x-a}\right)^n$ peut devenir moindre que toute grandeur donnée, ce qui montre que le terme complémentaire J a pour limite zéro. Nous obtenons donc pour l'intégrale considérée une série procédant suivant les puissances de $\frac{1}{x-a}$, sans terme constant, qui est convergente dans tout le plan. Je la désignerai par $G_a\left(\frac{1}{x-a}\right)$, de sorte qu'on aura : $(a) = -G_a\left(\frac{1}{x-a}\right)$, puis semblablement $(b) = -G_b\left(\frac{1}{x-b}\right)$ etc ; joignant ensuite à ces résultats la valeur déjà connue de l'intégrale représentée par (x) qui est $f(x)$, la relation :

$$(S) - (a) - (b) \ldots\ldots (x) = 0$$

donnera celle-ci :

$$\Phi(x) + G_a\left(\frac{1}{x-a}\right) + G_b\left(\frac{1}{x-b}\right) + \ldots\ldots - f(x) = 0.$$

On en conclut :

$$f(x) = \Phi(x) + G_a\left(\frac{1}{x-a}\right) + G_b\left(\frac{1}{x-b}\right) + \ldots\ldots$$

c'est dans l'étendue limitée par le contour S ; l'expression de la fonction sous une forme entièrement analogue à celle d'une fraction rationnelle décomposée en fractions simples, et qui met en évidence les diverses discontinuités qu'elle présente dans la région considérée.

Nous avons en particulier, lorsque l'aire ne contient qu'une seule discontinuité, la formule importante :

$$f(x) = \Phi(x) + G_a\left(\frac{1}{x-a}\right),$$

elle permet comme nous allons le montrer de reconnaître les circonstances que présente la fonction lorsqu'on suppose x voisin de a.

Remarquons, à cet effet, que la fonction G_a peut être un polynôme ou une série infinie. Lorsque G_a est un polynôme en $\frac{1}{x-a}$, on dit que le point a est un pôle de la fonction $f(x)$, mais quand $G_a\left(\frac{1}{x-a}\right)$ sera une fonction transcendante

de $\frac{1}{x-a}$, c'est-à-dire une série infinie, le point a sera alors nommé un point singulier essentiel.

Soit en premier lieu,

$$G_a\left(\frac{1}{x-a}\right)=\frac{A}{x-a}+\frac{A_1}{(x-a)^2}+\cdots\cdots+\frac{A_{m-1}}{(x-a)^m}$$

on en conclut que $x-a$ tendant vers zéro $G_a\left(\frac{1}{x-a}\right)$ augmente sans limite. La partie holomorphe de l'expression de $f(x)$ ayant une valeur essentiellement finie, la fonction devient plus grande que toute quantité donnée dans le voisinage d'un pôle.

Ajoutons encore que le produit de $f(x)$ par $(x-a)^m$ est fini pour $x=a$, et développable dans l'aire que nous considérons suivant les puissances de $x-a$, par la série de Taylor. En faisant ainsi $(x-a)^m f(x)=F(x)$, on en conclut :

$$\frac{1}{f(x)}=\frac{(x-a)^m}{F(x)},$$

et l'on voit que l'inverse de $f(x)$ s'annule pour $x=a$.

Nous montrerons ensuite que dans le voisinage d'un point essentiel, la fonction est complètement indéterminée, et peut prendre une valeur quelconque arbitrairement choisie, à l'exception peut-être d'une seule.

La fonction $G(z)$ étant, en effet, transcendante et holomorphe, on sait d'après les théorèmes de M. Picard rappelés précédemment, que l'équation $G(z)=\alpha+i\beta$ admet toujours un nombre infini de racines $z=z_n$ sauf, au plus, pour une seule et unique valeur du second membre. Nous savons aussi que ces racines sont representées par des points isolés et séparés par des intervalles finis, il en résulte que le module de z_n croît au-delà de toute limite. Cela étant, la relation $\frac{1}{x-a}=z_n$ donne :

$$x=a+\frac{1}{z_n}$$

ce qui prouve que dans le voisinage d'un point essentiel la fonction $G_a\left(\frac{1}{x-a}\right)$, et par suite aussi, la fonction considérée peut prendre une valeur quelconque donnée à l'avance sauf peut-être une seule.

En renvoyant pour plus de détail au mémoire déjà cité de M. Picard (Annales de l'Ecole Normale, 1880), nous allons éclaircir ce qui précède par un exemple. Considérons la fonction :

$$e^{\frac{1}{x-a}}=1+\frac{1}{1}\,\frac{1}{x-a}+\frac{1}{1.2}\,\frac{1}{(x-a)^2}+\frac{1}{1.2.3}\,\frac{1}{(x-a)^3}+\cdots\cdots,$$

je dis qu'en désignant par $\alpha+i\beta$ une quantité arbitraire, il est possible d'obtenir une valeur $\xi+i\eta$ de $x-a$, aussi petit qu'on le veut, et telle que l'on ait :

$$e^{\frac{1}{\xi+i\eta}}=\alpha+i\beta.$$

Soit à cet effet :

$$\alpha+i\beta=e^{p+iq},$$

l'équation précédente devient alors :

$$\frac{1}{\xi + i\eta} = p + iq = \frac{p^2+q^2}{p-iq}$$

et l'on en tire :

$$\xi = \frac{p}{p^2+q^2},$$

$$\eta = \frac{-q}{p^2+q^2}$$

Il semble ainsi que ξ et η soient complètement déterminés ; mais l'équation proposée est encore satisfaite si on y remplace q par $q + 2k\pi$, k étant un entier arbitraire, puisque l'exponentielle admet la période $2i\pi$; q peut donc augmenter au-delà de toute limite et par conséquent ξ et η sont susceptibles de devenir aussi petits qu'on le veut. La fonction $e^{\frac{1}{x-a}}$ est donc complètement indéterminée dans le voisinage du point a.

J'indiquerai encore une différence caractéristique entre les pôles et les points essentiels ; si l'on considère, en effet, au lieu de la fonction proposée son inverse, on voit qu'un pôle se transforme en un zéro, tandis qu'un point essentiel reste un point essentiel, l'inverse de la fonction étant indéterminée comme la fonction elle-même.

Nous nous proposons maintenant d'obtenir l'expression analytique générale des fonctions uniformes dont nous faisons l'étude, et nous considérerons d'abord le cas qui a été traité pour la première fois par M.r Wierstrass lorsque les discontinuités sont en nombre fini. Le résultat obtenu par l'illustre géomètre est la conséquence de l'égalité précédemment établie.

$$f(x) = \Phi(x) + G_a\left(\frac{1}{x-a}\right) + G_b\left(\frac{1}{x-b}\right) + \cdots\cdots$$

en supposant que toutes les discontinuités soient contenues à l'intérieur du contour S. On voit, en effet qu'en le faisant grandir indéfiniment on étend sans limite le domaine dans lequel $\Phi(x)$ est holomorphe. Si nous désignons alors cette fonction par $G(x)$ on obtient pour tout le plan la formule de M.r Weierstrass.

$$f(x) = G(x) + G_a\left(\frac{1}{x-a}\right) + G_b\left(\frac{1}{x-b}\right) + \cdots\cdots$$

C'est à M.r Mittag-Leffler qu'est due l'expression des fonctions uniformes, dans le cas d'un nombre infini de discontinuités et nous suivrons pour l'obtenir la méthode même qui a conduit le savant géomètre à sa belle découverte. Cette méthode, donnée par M. Weierstrass pour le cas des discontinuités polaires, a pu facilement s'appliquer, comme le remarque M.r Mittag-Leffler, aux fonctions qui admettent des points essentiels. Elle a même une portée plus étendue,

et a été employée avec succès par Mr Poincaré et M. Appel dans des recherches profondes et du plus haut intérêt sur les fonctions de plusieurs variables. (1)

Soit $a_1, a_2, \ldots\ldots a_n, \ldots\ldots$ les affixes des points de discontinuité de la fonction uniforme $f(x)$, en supposant.

$$\text{Mod}\, a_1 < \text{Mod}\, a_2 \ldots\ldots < \text{Mod}\, a_n$$

et admettant que le module de a_n augmente avec n au-delà de toute limite. Soit encore $G_n\left(\frac{1}{x-a_n}\right)$ l'expression précédemment obtenue de l'intégrale $\frac{1}{2i\pi}\int\frac{f(z)dz}{z-x}$ prise autour d'une circonférence de rayon infiniment petit ayant son centre au point a_n. Je poserai en développant par la formule de Maclaurin suivant les puissances de la variable:

$$G_n\left(\frac{1}{x-a_n}\right) = A_0^{(n)} + A_1^{(n)} x + \cdots + A_\nu^{(n)} x^\nu + R_\nu\,,$$

R_ν désignant le reste de la série, ou pour abréger:

$$G_n\left(\frac{1}{x-a_n}\right) = F_n(x) + R_\nu\,.$$

On sait que pour une valeur donnée de x il est possible de prendre un nombre suffisant de termes du développement c'est-à-dire déterminer ν, de manière que le reste R_ν soit plus petit qu'une quantité donnée. Cela étant, désignons avec Mr Weierstrass par $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots\ldots \varepsilon_n$ des quantités positives, telles que la suite $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \cdots\cdots + \varepsilon_n + \cdots\cdots$ soit convergente; je dispose des degrés des polynômes $F_n(x)$ de manière à avoir:

$$\text{Mod}\left[G_1\left(\frac{1}{x-a_1}\right) - F_1(x)\right] < \varepsilon_1$$

en supposant $\text{Mod}\, x < \text{mod}\, a_1$, puis:

$$\text{Mod}\left[G_2\left(\frac{1}{x-a_2}\right) - F_2(x)\right] < \varepsilon_2$$

avec la condition $\text{Mod}\, x < \text{mod}\, a_2$ et en général:

$$\text{Mod}\left[G_n\left(\frac{1}{x-a_n}\right) - F_n(x)\right] < \varepsilon_n$$

en admettant qu'on ait: $\text{Mod}\, x < \text{mod}\, a_n$. Avec ces données, je forme la série:

$$\Sigma\left[G_n\left(\frac{1}{x-a_n}\right) - F_n(x)\right]$$
$$(n = 1, 2, 3, \ldots\ldots),$$

et je dis qu'elle représente une fonction analytique de la variable, finie dans tout le plan, à l'exception des points de discontinuité. Ayant admis, en effet, que le module de a_n augmente sans limite avec n, on peut quelque soit x, poser la condition $\text{Mod}\, x < \text{mod}\, a_n$. Cela étant j'isole les $n-1$ premiers termes, dont la somme est une quantité finie, et j'observe que les suivants ont leurs modules moindres que $\varepsilon_n + \varepsilon_{n+1}, \varepsilon_{n+2}$, etc,

---

(1) Poincaré – Sur les fonctions de deux variables; Acta mathematica, T. II.

Appel – Sur les fonctions de trois variables réelles satisfaisant à l'équation $\Delta F = 0$, id T. IV.

Voyez aussi dans les Annali di Mathematica de Milan, T. X, un mémoire de M. Casorati: Aggiunte a recenti lavori da Signor Weierstrass e Mittag-Leffler sulle funzioni di una variable complessa

en supposant Mod x < Mod a_n, Mod. x < Mod. a_{n+1}, etc, et à fortiori par conséquent pour la valeur donnée à la variable. Cette seconde partie de la série est donc finie comme la première, puisque par hypothèse la suite $\varepsilon_n + \varepsilon_{n+1} + \varepsilon_{n+2} + \ldots\ldots$ est convergente.

Ceci établi, je rappelle que dans une portion du plan limitée par un contour S, contenant la seule discontinuité $x = \alpha_n$, la fonction $f(x)$ s'exprime par cette formule:

$$f(x) = \Phi(x) + G_n\left(\frac{1}{x-\alpha_n}\right)$$

On a donc:

$$f(x) - G_n\left(\frac{1}{x-\alpha_n}\right) = \Phi(x)$$

et l'on voit qu'en retranchant de la fonction la quantité $G_n\left(\frac{1}{x-\alpha_n}\right)$ on a fait disparaitre cette discontinuité, $\Phi(x)$ étant comme nous l'avons établi holomorphe à l'intérieur de S. Il en est encore de même si l'on emploie $G_n\left(\frac{1}{x-\alpha_n}\right) - F_n(x)$ au lieu de $G_n\left(\frac{1}{x-\alpha_n}\right)$; de là nous concluons que la différence:

$$f(x) - \Sigma\left[G_n\left(\frac{1}{x-\alpha_n}\right) - F_n(x)\right]$$
$$(n = 1, 2, 3 \ldots\ldots);$$

n'ayant plus aucune discontinuité représente une fonction $G(x)$ holomorphe dans tout le plan et c'est ainsi qu'on parvient à l'expression générale des fonctions uniformes que M. Mittag-Leffler a le premier obtenue:

$$f(x) = G(x) + \Sigma\left[G_n\left(\frac{1}{x-\alpha_n}\right) - F_n(x)\right].$$

Il ne sera pas inutile pour éclaircir ce qui précède de donner un exemple de la détermination des degrés des polynômes $F_n(z)$; je considérerai à cet effet le cas où l'on a simplement: $G_n\left(\frac{1}{x-\alpha_n}\right) = \frac{A_n}{x-\alpha_n}$ ce qui donne:

$$F_n(x) = -A_n\left[\frac{1}{\alpha_n} + \frac{x}{\alpha_n^2} + \ldots\ldots + \frac{x^{\nu-1}}{\alpha_n^{\nu}}\right]$$

et par conséquent:

$$G_n\left(\frac{1}{x-\alpha_n}\right) - F_n(x) = \frac{A_n x^{\nu}}{\alpha_n^{\nu}(x-\alpha_n)}.$$

Déjà nous avons vu en établissant la notion des facteurs primaires p. (86) que la série $\Sigma \frac{x^{\nu}}{\alpha_n^{\nu}(x-\alpha_n)}$ était rendue convergente dans tout le plan en prenant $\nu = n-1$, quelque soit α_n. C'est une question toute semblable que nous allons traiter par un procédé analogue. Nous poserons à cet effet:

$$\text{Mod}\, A_n = [\text{Mod}\, \alpha_n]^{\lambda_n}$$

le module du terme général deviendra donc:

$$U_n = \frac{(\text{mod}\, x)^{\nu}}{(\text{mod}\, \alpha_n)^{\nu-\lambda_n}} \, \frac{1}{\text{Mod}(x-\alpha_n)}$$

et il s'agira de déterminer ν au moyen de n, de manière que la limite de $U_n^{\frac{1}{n}}$ pour n infini soit inférieure à l'unité. Remarquons d'abord que le module de α_n croissant

indéfiniment, la limite de $[\text{Mod}(x-x_n)]^{\frac{1}{n}}$ a pour minimum l'unité ; on peut donc considérer, au lieu de U_n, la quantité plus simple :

$$U_n = \frac{(\text{Mod}\,x)^\nu}{(\text{Mod}\,a_n)^{\nu-\lambda_n}}$$

Cela posé, distinguons deux cas suivant que λ_n est négatif, nul ou positif ; prenons dans le premier $\lambda_n = -\sigma_n$ et décomposons la série proposée dans les deux suivantes :

$$S = \sum \frac{(\text{Mod}\,x)^\nu}{(\text{Mod}\,a_n)^{\nu+\sigma_n}},$$

$$S_1 = \sum \frac{(\text{Mod}\,x)^\nu}{(\text{Mod}\,a_n)^{\nu-\lambda_n}}$$

On voit immédiatement que la série S devient convergente si l'on prend $\nu = n$, la quantité :

$$U_n^{\frac{1}{n}} = \frac{\text{Mod}\,x}{(\text{Mod}\,a_n)^{1+\frac{\sigma_n}{n}}}$$

ayant alors pour limite zéro, lorsque n est infini.

Dans le second cas, nous ferons :

$$\nu = n + 2\lambda_n$$

ce qui donne :

$$U_n = \left(\frac{\text{Mod}\,x}{\text{Mod}\,a_n}\right)^n \left(\frac{\text{Mod}\,x^2}{\text{Mod}\,a_n}\right)^{\lambda_n},$$

d'où.

$$U_n^{\frac{1}{n}} = \left(\frac{\text{Mod}\,x}{\text{Mod}\,a_n}\right) \left(\frac{\text{Mod}\,x^2}{\text{Mod}\,a_n}\right)^{\frac{\lambda_n}{n}}$$

et cette expression est encore nulle pour n infini. En effet, le facteur $\frac{\text{Mod}\,x^2}{\text{Mod}\,x_n}$ qui est élevé à une puissance positive $\frac{\lambda_n}{n}$, décroît indéfiniment, cette puissance ne peut donc avoir une limite supérieure à l'unité, et la quantité $\frac{\text{mod}\,x}{\text{mod}\,a_n}$ a zéro pour limite. La détermination de ν ainsi obtenue est plus simple que celle qui avait été donnée dans la 2me édition de ce cours (p. 85) elle est due à M. Camille Jordan (Cours d'Analyse de l'École Polytechnique, T. II, p. 321)

Nous remarquerons enfin que les polynômes $F_n(x)$ ainsi que $G(x)$ n'ont pas une seule et unique détermination. Qu'on désigne en effet par $\Phi_1(x)\ \Phi_2(x) \ldots \Phi_n(x), \ldots$ des polynômes dont la somme soit une fonction holomorphe $\Phi(x)$ on aura encore pour l'expression de $f(x)$ la formule :

$$f(x) = G(x) + \Phi(x) + \sum \left[G_n\left(\frac{1}{x-a_n}\right) - F_n(x) - \Phi_n(x) \right].$$

Après avoir démontré le théorème de M. Mittag-Leffler, et établi ainsi l'expression analytique générale des fonctions uniformes, il nous reste encore à donner la forme spéciale qui est propre au cas où la fonction considérée n'a comme discontinuités que des pôles.

Soit alors, $a_1, a_2, \ldots\ldots$ les pôles de la fonction $f(x)$ que nous supposerons rangés

de manière que leurs modules aillent en croissant. Nous avons vu que le caractère analytique d'un pôle $x=a$ consiste en ce qu'il existe un nombre entier et positif n tel que le produit $(x-a)^n f(x)$ soit fini pour $x=a$. Construisons donc une fonction $G(x)$ holomorphe dans tout le plan, s'évanouissant pour les valeurs $x=a_1, a_2, \dots$, et prenons les degrés de multiplicité des facteurs primaires égaux à ceux des pôles correspondants de $f(x)$. Le produit $G(x) f(x)$ ne présentera plus aucune discontinuité, ce sera par conséquent une fonction holomorphe $G_1(x)$ et on aura:

$$f(x) = \frac{G_1(x)}{G(x)}$$

Il est ainsi démontré qu'une fonction uniforme n'admettant que des discontinuités polaires s'exprime par le quotient de deux fonctions holomorphes dans tout le plan.

Nous renverrons pour l'étude plus complète des fonctions uniformes au mémoire célèbre de M.r Weierstrass précédemment cité, ainsi qu'à un travail plus récent de M.r Mittag-Leffler intitulé: Sur la représentation analytique des fonctions monogènes uniformes d'une variable (Acta Mathematica, T. III), et voici la dernière remarque que nous ferons sur cet important sujet.

Considérons une fonction holomorphe $G(x)$, et remplaçons la variable par son inverse. Dans le cas ou $G(x)$ est un polynôme de degré n, la fonction $G\left(\frac{1}{x}\right)$ admettra le point $x=o$ comme pôle d'ordre n de multiplicité. Mais si l'on suppose que $G(x)$ soit transcendante et representée par une série infinie ordonnée suivant les puissances croissantes de la variable, le point $x=0$ est à l'égard de $G\left(\frac{1}{x}\right)$ un point essentiel. On est ainsi conduit à dire que l'infini est un tel point pour $G(x)$ et à distinguer de cette manière les fonctions holomorphes transcendantes des polynômes de l'algèbre; j'ai dû donner cette notion analytique qui est maintenant d'un usage continuel.

12.e Leçon.

Notre première application du théorème de M. Mittag-Leffler a pour objet la fonction $\cot. x$, dont l'expression par une série infinie de fractions simples est d'une grande importance en Analyse. Les discontinuités sont alors des pôles simples $x=n\pi$, n étant un entier quelconque, et les quantités $G_n\left(\frac{1}{x-a_n}\right)$ des fractions de la forme $\frac{A_n}{x-n\pi}$. Le coefficient A_n est déterminé par la condition que la différence $\cot x - \frac{A_n}{x-n\pi}$ soit finie pour $x=n\pi$; c'est à dire que A_n est la limite de $(x-n\pi)\cot. x$ ou encore de la fraction $\frac{(x-n\pi)\cos x}{\sin x}$

lorsqu'on suppose $x = n\pi$, ce qui donne $A_n = 1$.

Cela étant, on remarquera que la série

$$\Sigma \frac{1}{x - n\pi}$$
$$(n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\ldots)$$

est divergente ; il nous faut donc recourir aux polynomes désignés par $F_n(x)$ et il suffit d'en employer le premier terme $-\frac{1}{n\pi}$, la nouvelle suite

$$\Sigma\left[\frac{1}{x-n\pi} + \frac{1}{n\pi}\right] = \Sigma \frac{x}{n\pi(x-n\pi)}$$

ayant la convergence de la série $\Sigma \frac{1}{n^2}$. De là résulte en mettant à part le terme $\frac{1}{x}$, l'expression :

$$\cot x = Gx + \frac{1}{x} + \Sigma\left[\frac{1}{x-n\pi} + \frac{1}{n\pi}\right]$$
$$n = (\pm 1, \pm 2, \ldots\ldots\ldots)$$

ou $G(x)$ est une fonction holomorphe qui reste à déterminer. C'est ce que je vais faire en revenant, à cet effet, à la relation qui a été le point de départ de l'étude des fonctions uniformes, à savoir :

$$\frac{1}{2i\pi}\int_S \frac{f(z)\,dz}{z-x} = f(x) - G_a\left(\frac{1}{x-a}\right) - G_b\left(\frac{1}{x-b}\right) - \ldots\ldots$$

Je rappelle que l'intégrale du premier membre se rapporte à un contour fermé S, comprenant les diverses discontinuités de $f(x)$ désignées par a, b, etc, et nous avons vu qu'elle représente à l'intérieur de ce contour une fonction holomorphe de x. Supposons maintenant qu'en agrandissant la courbe S l'intégrale tende vers une limite déterminée, par exemple zéro, on en conclura pour l'expression de la fonction la série $G_a\left(\frac{1}{x-a}\right) + G_b\left(\frac{1}{x-b}\right) + \ldots$ étendue à toutes les discontinuités et qui sera alors nécessairement convergente. En me plaçant à ce point de vue, je supposerai $f(z) = \frac{\cot z}{z}$, et je choisirai pour contour d'intégration un carré $ABCD$ (fig. 44) ayant son centre à l'origine des coordonnées et ses côtés parallèles aux axes. Soit $AB = 2a$ les expressions de z qui représentent successivement les segments AB, BC, CD, DA seront :

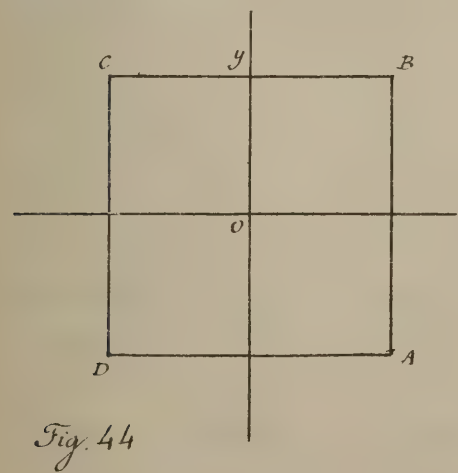


Fig. 44

$$z = a + it, \qquad z = ia - t, \qquad z = -a - it, \qquad z = -ia + t,$$

en faisant croître t de $-a$ à $+a$. L'intégrale $J = \int F(z)\,dz$ d'une fonction quelconque $F(z)$ prise en décrivant dans le sens direct, le contour du carré aura donc pour expression :

$$J = (AB) + (BC) + (CD) + (DA)$$
$$= i\int_{-a}^{+a}[F(a+it) - F(-a-it)]\,dt + \int_{-a}^{+a}[F(-ia+t) - F(ia-t)]\,dt.$$

J'applique maintenant la formule de M. Darboux, démontrée page 60 ; elle donne

en désignant par λ et λ' deux quantités dont le module ne dépasse pas l'unité et par t_0 et t_1 deux valeurs de t comprises entre les limites $-a$ et $+a$.

$$J = 2\lambda a\left[F(a+it_0) - F(-a-it_0)\right] + 2\lambda' a\left[F(t_1 - ia) - F(-t_1+ia)\right].$$

On aura donc, si l'on suppose $F(z) = \dfrac{\cot z}{z(z-x)}$,

$$J = \frac{2\lambda a \cot(a+it_0)}{a+it_0}\left[\frac{1}{a+it_0-x} + \frac{1}{a+it_0+x}\right]$$

$$+ \frac{2\lambda' a\cot(t_1 - ia)}{t_1 - ia}\left[\frac{1}{t_1 - ia - x} + \frac{1}{t_1 - ia + x}\right]$$

Cela étant on va voir qu'en faisant $a\ m\pi + \frac{\pi}{2}$, ou m est entier, on a $J=0$, pour m infiniment grand. En effet, les formules suivantes:

$$\text{Mod}^2 \cot(a+it_0) = \frac{\cos 2it_0 - 1}{\cos 2it_0 + 1}$$

$$\text{Mod}^2 \cot(t_1 + ia) = \frac{\cos 2ia + \cos 2t_1}{\cos 2ia - \cos 2t_1}$$

montrent que le premier module est inférieur à l'unité et que pour des valeurs croissantes de a le second tend rapidement vers un; il ne reste plus ainsi qu'à supposer a infini, dans des fractions où le degré du numérateur par rapport à cette quantité est moindre que celui du dénominateur d'où par conséquent le résultat annoncé.

Ce point établi, nous formerons l'expression de $\dfrac{\cot x}{x}$, au moyen des pôles simples $x = n\pi$, auxquels correspondent les fractions $\dfrac{1}{n\pi(x-n\pi)}$, mais en exceptant le cas de $n=0$. On a alors un pôle double donnant comme on le voit facilement, le terme $\dfrac{1}{x^2}$; en le mettant à part, on obtient la formule:

$$\frac{\cot x}{x} = \frac{1}{x^2} + \sum \frac{1}{n\pi(x-n\pi)}$$

$$(n = \pm 1, \pm 2, \ldots\ldots),$$

d'où l'on tire

$$\cot x = \frac{1}{x} + \sum \frac{x}{n\pi(x-n\pi)};$$

ou bien:

$$\cot x = \frac{1}{x} + \sum\left[\frac{1}{x-n\pi} + \frac{1}{n\pi}\right].$$

C'est le résultat auquel nous voulions parvenir et qui montre que la fonction désignée plus haut par $G(x)$ est nulle, comme nous l'avions dit. Voici la première conséquence à en déduire.

Faisons passer le terme $\dfrac{1}{x}$ dans le premier membre, multiplions par dx, et intégrons à partir de $x=0$, on trouve ainsi:

$$\log\frac{\sin x}{x} = \sum\left[\log.\left(1 - \frac{x}{n\pi} + \frac{x}{n\pi}\right)\right];$$

$$(n = \pm 1, \pm 2, \ldots\ldots);$$

prenant les exponentielles et chassant le dénominateur nous aurons ensuite:

$$\sin x = x \Pi \left[\left(1 - \frac{x}{n\pi}\right) e^{\frac{x}{n\pi}} \right],$$

c'est-à-dire la formule de décomposition de $\sin \pi x$ en facteurs primaires, telle qu'elle a été donnée page 88

On peut obtenir une autre expression plus générale dans laquelle les facteurs primaires contiennent une constante arbitraire, de la manière suivante:

Changeons x en $x+\xi$ dans la formule qui donne $\cot x$, nous aurons ainsi:

$$\cot(x+\xi) = \frac{1}{x+\xi} + \Sigma \left[\frac{1}{x+\xi-n\pi} + \frac{1}{n\pi} \right].$$

Retranchons ensuite membre à membre avec l'égalité:

$$\cot \alpha = \frac{1}{\alpha} + \Sigma \left[\frac{1}{\alpha - n\pi} + \frac{1}{n\pi} \right]$$

où α désigne une constante arbitraire, le terme $\frac{1}{n\pi}$ disparait dans la différence, et l'on peut écrire en supposant $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\ldots$

$$\cot(x+\xi) - \cot\alpha = \Sigma \left[\frac{1}{x+\xi-n\pi} - \frac{1}{\alpha - n\pi} \right]$$

De là se tire si l'on intègre depuis $x = 0$

$$\log \frac{\sin(x+\xi)}{\sin \xi} - x \cot \alpha = \Sigma \left[\log\left(1 + \frac{x}{\xi - n\pi}\right) - \frac{x}{\alpha - n\pi} \right]$$

et par conséquent:

$$\frac{\sin(x+\xi)}{\sin\xi} = e^{x\cot\alpha} \Pi \left[\left(1 + \frac{x}{\xi - n\pi}\right) e^{-\frac{x}{\alpha - n\pi}} \right]$$

$$(n = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots\ldots)$$

Dans cette nouvelle forme de décomposition en facteurs primaires, la constante α est quelconque, on peut même la prendre égale à zéro. Pour cela je mettrai à part le facteur correspondant à $n = 0$ c'est à dire:

$$\left(1 + \frac{x}{\xi}\right) e^{-\frac{x}{\alpha}},$$

Observant ensuite que la différence $\cot\alpha - \frac{1}{\alpha}$ est nulle pour $\alpha = 0$ on obtient ainsi:

$$\frac{\sin(x+\xi)}{\sin\xi} = \left(1 + \frac{x}{\xi}\right) \Pi \left[\left(1 + \frac{x}{\xi - n\pi}\right) e^{\frac{x}{n\pi}} \right]$$

$$(n = \pm 1, \pm 2, \ldots\ldots)$$

De ce résultat nous tirons en supposant $\xi = \frac{\pi}{2}$

$$\cos x = \left(1 + \frac{2x}{\pi}\right) \Pi \left[\left(1 - \frac{2x}{(2n-1)\pi}\right) e^{\frac{x}{n\pi}} \right]$$

c'est l'expression qui a été précédemment donnée (p. 90)

Je change ensuite ξ en $\xi + \frac{\pi}{2}$ et α en $\alpha + \frac{\pi}{2}$, il viendra en posant $m = 2n-1$:

$$\frac{\cos(x+\xi)}{\cos\xi} = e^{-x\tan\alpha} \Pi \left[\left(1 + \frac{2x}{2\xi - m\pi}\right) e^{-\frac{2x}{2a - m\pi}} \right]$$

d'où pour $\xi = 0$ et $a = 0$:

$$\cos x = \Pi\left[\left(1-\frac{2x}{m\pi}\right)e^{\frac{2x}{m\pi}}\right]$$

Mr Weyr a démontré comme on l'a vu l'identité des deux formules, nous parvenons maintenant à la même conclusion en montrant qu'elles sont des cas particuliers d'une seule expression plus générale. J'ajoute enfin les relations suivantes qui s'obtiennent facilement :

$$\frac{\sin(x+\xi)}{\sin\xi} = \Pi\left[\left(1+\frac{x}{\xi-n\pi}\right)e^{-\frac{n\pi x}{a^2-n^2\pi^2}}\right]$$

$$\frac{\cos(x+\xi)}{\cos\xi} = \Pi\left[\left(1+\frac{2x}{2\xi-m\pi}\right)e^{-\frac{2m\pi x}{4a^2-m^2\pi^2}}\right]$$

Un second résultat a pour objet le développement de $\cot x$ suivant les puissances croissantes de x, qui joue en analyse un rôle important. Je remarque, pour l'obtenir, qu'en réunissant dans la somme $\Sigma \frac{x}{x(n-x)}$ les termes qui correspondent à des valeurs de l'entier n égales et de signes contraires on a cette nouvelle formule :

$$\pi \cot \pi x = \frac{1}{x} - \Sigma \frac{2x}{k^2 - x^2}$$

$$(k = 1, 2, 3, \ldots\ldots)$$

Cela étant, j'emploie la série élémentaire :

$$\frac{1}{k^2-x^2} = \frac{1}{k^2} + \frac{x^2}{k^4} + \cdots\cdots + \frac{x^{2n-2}}{k^{2n}} + \cdots,$$

qui est convergente pour une valeur de x dont le module est inférieur à k ; sous la condition $\bmod x < 1$ elle est donc applicable à toutes les fractions qui entrent dans la somme et en posant pour abréger :

$$S_{2n} = 1 + \frac{1}{2^{2n}} + \frac{1}{3^{2n}} + \cdots\cdots + \frac{1}{n^{2n}} + \cdots\cdots$$

nous obtenons immédiatement l'expression cherchée.

$$\pi \cot \pi x = \frac{1}{x} - 2S_2 x - 2S_4 x^3 \ldots\ldots\ldots - 2S_{2n} x^{2n-1} \ldots\ldots\ldots$$

Mais on parvient directement à ce développement au moyen de la formule de Maclaurin, en l'appliquant à la fonction $x \cot x$ qui ne contient plus le terme en $\frac{1}{x}$. On peut aussi partir du quotient.

$$x \cot x = \frac{1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{2.3.4} - \cdots\cdots}{1 - \frac{x^2}{2.3} + \frac{x^4}{2.3.4.5} - \cdots\cdots}$$

et employer la méthode des coefficients indéterminés qui sera plus rapide.

Soit alors :

$$x \cot x = 1 - \frac{B_1 (2x)^2}{2} - \frac{B_2 (2x)^4}{2.3.4} \cdots\cdots - \frac{B_n (2x)^{2n}}{2.3\ldots\ldots 2n} - \cdots\cdots$$

les constantes $B_1, B_2, \ldots\ldots$ étant ce que l'on nomme les nombres de Bernoulli, en égalant les termes en x^{2n} dans les deux membres de l'identité :

$$x \sin x = \cos x \left[1 - \frac{B_1 (2x)^2}{2} - \frac{B_2 (2x)^4}{2.3.4} \ldots\ldots - \frac{B_n (2x)^{2n}}{2.3\ldots.2n} - \ldots\ldots\right]$$

on trouve facilement la relation suivante, où $(2n+1)_i$ désigne le coefficient de x^i dans le développement de $(1+x)^{2n+1}$, à savoir :

$$4 B_1 (2n+1)_2 - 4^2 B_2 (2n+1)_4 + 4^3 B_3 (2n+1)_6 \ldots\ldots - (-1)^n B_n (2n+1) = 2 \ldots$$

Elle détermine de proche en proche les coefficients inconnus si l'on y fait $n = 1, 2, 3$, etc, et donne les valeurs :

$$B_1 = \frac{1}{6},\ B_2 = \frac{1}{30},\ B_3 = \frac{1}{42},\ B_4 = \frac{1}{30},\ B_5 = \frac{1}{66},\ B_6 = \frac{691}{2730},\ B_7 = \frac{7}{6}, \ldots\ldots$$

Remplaçons maintenant x par πx dans l'équation précédente, elle devient :

$$\pi x \cot \pi x = 1 - \frac{B_1 (2\pi x)^2}{2} - \frac{B_2 (2\pi x)^4}{2.3.4.} - \ldots \frac{B_n (2n x)^{2n}}{2.3\ldots.2n}$$

et comme on a d'autre part :

$$\pi x \cot \pi x = 1 - 2 s_2 x^2 - 2 s_4 x^4 - \ldots\ldots - 2 s_{2n} x^{2n} - \ldots\ldots$$

nous obtenons cette relation remarquable et importante.

$$\frac{B_n (2\pi)^{2n}}{2.3..\ 2n} = 2 s_{2n} = 2 \left(1 + \frac{1}{2^{2n}} + \frac{1}{3^{2n}} + \ldots\ldots\right)$$

On en conclut l'expression des nombres de Bernoulli, sous forme d'intégrales définies au moyen de la formule :

$$\int_0^\infty x^{2n-2} \log \frac{1}{1-e^{-x}} dx = \frac{B_n (2\pi)^{2n}}{4n(4n-1)}$$

dont nous ferons plus tard usage et que nous allons démontrer.

A cet effet, je pars du développement :

$$\log \frac{1}{1-e^{-x}} = e^{-x} + \frac{e^{-2x}}{2} + \frac{e^{-3x}}{3} + \ldots\ldots = \sum \frac{e^{-kx}}{k}$$

$$(k = 1, 2, 3 \ldots\ldots)$$

dont je tire :

$$\int_0^\infty x^{2n-2} \log \frac{1}{1-e^{-x}} dx = \sum \frac{1}{k} \int_0^\infty x^{2n-2} e^{-kx} dx.$$

Cela étant au moyen de la valeur connue :

$$\int_0^\infty x^{2n-2} e^{-nx} dx = \frac{2.3\ldots.(2n-3)}{k^{2n-1}}$$

le second membre devient

$$2.3..(2n-3)\left(1 + \frac{1}{4^{2n}} + \frac{1}{3^{2n}} + \ldots\ldots\right)$$

et par conséquent :

$$\frac{B_n (2\pi)^{2n}}{4n(4n-1)}$$

comme il s'agissait de le prouver.

Sans m'arrêter davantage aux nombres de Bernouilli dont l'étude a été le sujet de travaux nombreux et importants, je me bornerai à indiquer l'énoncé du beau théorème découvert en même temps par Clausen et Staudt, qui en donne l'expression suivante. Désignons par $\alpha, \beta, \ldots \lambda$, les nombres premiers satisfaisant à cette condition que $\frac{\alpha-1}{2}, \frac{\beta-1}{2}, \frac{\lambda-1}{2}$ soient diviseurs de l'indice k, on aura:

$$B_n = A_n + (-1)^n\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\cdots+\frac{1}{\lambda}\right)$$

où A_k est entier.

Ainsi en particulier:

$$B_7 = \frac{7}{6} = 2 - \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right),$$

$$B_8 = \frac{3617}{510} = 6 + \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{17}\right),$$

$$B_9 = \frac{43867}{798} = 56 - \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{7}+\frac{1}{19}\right)$$

Staudt a donné de son théorème une démonstration à laquelle je renvoie, Journal de Creelle T. 21 p. 372.

En revenant maintenant aux considérations générales sur les fonctions uniformes, j'établirai le théorème suivant de Riemann qui a été précédemment démontré dans le cas particulier des fonctions holomorphes.

Si deux fonctions uniformes U et V qui ont un nombre quelconque fini ou infini de pôles ou points singuliers essentiels, coïncident le long d'un élément de grandeur finie, aussi petit qu'on le veut, elles sont nécessairement identiques.

Considérons la différence U-V; c'est une fonction uniforme qui est nulle le long de l'élément donné, elle sera nulle par suite pour tous les points situés à l'intérieur d'un contour ne renfermant aucune des discontinuités de U ou de V, car à l'intérieur d'un tel contour, U-V est une fonction holomorphe. Agrandissons ce contour, en le faisant passer près d'un point de discontinuité a de U ou V; je dis que cette discontinuité, polaire ou essentielle, doit nécessairement disparaître dans la différence U-V. Ce ne peut être, en effet, un pôle pour cette différence, car à une distance suffisamment petite de ce point, la fonction devient plus grande que toute quantité donnée, et nous avons démontré qu'elle était nulle pour tous les points aussi voisins de a que l'on veut, ce ne peut être non plus un point essentiel, car dans le voisinage d'un tel point, une fonction uniforme est absolument indéterminée. La différence U-V n'admet donc pas de discontinuités, elle est nulle le long d'un élément fini; elle est nulle par suite dans tout le plan; c'est ce qu'il s'agissait d'établir.

Le théorème de Riemann montre qu'une fonction donnée le long d'une ligne de grandeur finie ne peut être étendue au-delà que d'une seule manière, si on lui impose la condition d'être uniforme et de n'avoir de discontinuités qu'en des points isolés. On peut aussi le rapprocher de cette proposition élémentaire

qu'une portion aussi petite qu'on le veut d'une courbe algébrique de degré connu, la détermine complètement et dans toute son étendue.

Cette démonstration facile qui ramène, comme on le voit, le théorème de Riemann à celui de M. Neumann, est due à M. Picard.

Une dernière proposition nous reste à établir dans la théorie des fonctions uniformes, c'est le théorème de Cauchy qui donne l'expression de l'intégrale de ces fonctions, prise le long d'un contour fermé quelconque. A ce théorème célèbre est attaché une notion d'une importance capitale en analyse, celle des résidus à laquelle il donne naissance, et dont Cauchy a tiré ses plus belles découvertes; voici comment on y parvient.

Soit $f(z)$ une fonction uniforme, S un contour fermé contenant les discontinuités $a, b, \ldots\ldots l$, de cette fonction. Nous isolerons chacun des points $a, b, \ldots l$ dans une courbe fermée, en formant ainsi une aire à plusieurs contours à l'intérieur de laquelle la fonction considérée sera finie et continue. On aura donc avec la notation déjà employée, la relation:

$$(S) - (a) - (b) \ldots - (l) = 0$$

et par conséquent

$$(S) = (a) + (b) + \cdots + (l).$$

Cela étant je considère l'intégrale (a), et j'observe que la fonction ayant la seule discontinuité $z = a$, à l'intérieur du contour d'intégration, on a sur ce contour même, l'expression.

$$f(z) = \phi(z) + G_a\left(\frac{1}{z-a}\right)$$

ou $\phi(z)$ comme nous l'avons vu, représente une fonction holomorphe. Il reste donc seulement à chercher l'intégrale du second terme; or on peut d'après la nature de la fonction G_a l'écrire sous cette forme:

$$G_a\left(\frac{1}{z-a}\right) = \frac{A}{z-a} + H'_a\left(\frac{1}{z-a}\right)$$

en désignant par $H'_a\left(\frac{1}{z-a}\right)$ la dérivée d'une fonction holomorphe de $\frac{1}{x-a}$. L'intégrale proposée s'obtient par conséquent en opérant simplement sur la fraction $\frac{A}{z-a}$ et l'on a ainsi.

$$(a) = 2i\pi A.$$

La constante A est ce que Cauchy appelle le résidu de la fonction $f(z)$ relativement au point $z = a$, pour lequel elle est discontinue; de la même manière, on aura:

$$(b) = 2i\pi B,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$(l) = 2i\pi L,$$

et le théorème qu'il s'agissait d'obtenir consiste dans l'égalité :

$$(S) = 2i\pi\,(A + B + \cdots + L)$$

Les résidus A, B, ... L, qui figurent dans l'expression de l'intégrale (S), s'offrent ainsi comme les coefficients des termes en $\frac{1}{x-a}$, $\frac{1}{x-b}$, ... $\frac{1}{x-l}$ dans les différentes fonctions $G_a\left(\frac{1}{x-a}\right)$, $G_b\left(\frac{1}{x-b}\right)$ ..... $G_l\left(\frac{1}{x-l}\right)$ Cauchy les définit encore en disant que le résidu de $f(z)$ correspondant à la discontinuité $z = a$, est le coefficient de $\frac{1}{h}$ dans le développement de $f(a+h)$ suivant les puissances croissantes et décroissantes de cette quantité. Revenons, en effet, à l'expression de la fonction dans le domaine du point a :

$$f(z) = \phi(z) + G_a\left(\frac{1}{z-a}\right);$$

on en tire :

$$f(a+h) = \phi(a+h) + G_a\left(\frac{1}{h}\right)$$

et l'on voit que le premier terme $\phi(a+h)$ donne une série entière en h, et le second une série entière en $\frac{1}{h}$, dont le premier est $\frac{A}{h}$.

Supposons, par exemple, que $f(z)$ soit le quotient de deux fonctions holomorphes et posons : $f(z) = \frac{F(z)}{G(z)}$. Le résidu correspondant à une racine simple $z = a$, de l'équation $G(z) = 0$ sera le terme en $\frac{1}{h}$ dans le développement de l'expression :

$$f(a+h) = \frac{F(a) + h\,F'(a) + \cdots}{h\,G'(a) + \frac{h}{2}^2\,G''(a) + \cdots}$$

ce qui donne immédiatement la valeur : $A = \frac{F(a)}{G'(a)}$. En supposant ensuite que $z = a$ soit une racine double et qu'on ait : $G'(a) = 0$, on trouvera :

$$A = \frac{6F'(a)\,G''(a) - 2\,F(a)\,G'''(a)}{3\,G''^2(a)}.$$

enfin dans le cas de l'expression :

$$f(z) = \frac{F(a)}{G^2(z)}$$

et pour une racine simple de l'équation $G(z) = 0$, représentant un pôle double de la fonction le résidu est :

$$A = \frac{F'(a)\,G'(a) - F(a)\,G''(a)}{G'^3(a)}$$

Les applications que nous allons faire de ce théorème auront pour but de familiariser avec cette notion des résidus qui est d'un continuel usage dans l'analyse.

12ème Leçon.

Notre première application de la proposition de Cauchy exprimée par la relation :

$$\int_S f(z)\,dz = 2i\pi\,(A + B + \cdots + L)$$

aura pour objet la détermination de l'intégrale définie $J=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt$ lorsque $f(t)$ représente une fonction rationnelle $\frac{F(t)}{G(t)}$ dont le dénominateur remplit la condition de n'avoir pas de racines réelles et d'être d'un degré supérieur de deux unités au moins au degré du numérateur.

Fig.

Prenons pour le contour S un demi-cercle AMB, de rayon R, ayant son centre à l'origine des coordonnées et pour diamètre AB, on aura ainsi:

$$(S)=(AMB)+BA).$$

or en posant $z=Re^{it}$ la première intégrale a pour expression:

$$(AMB)=\int_0^{\pi} f(Re^{it})\,iRe^{it}dt.$$

Quant à la seconde (BA) c'est l'intégrale rectiligne $\int_{-R}^{+R} f(t)\,dt$ qui donne la quantité cherchée, en supposant le rayon infini. Soit donc Σ la somme des résidus de $f(t)$ relatifs aux pôles situés à l'intérieur du demi-cercle AMB on aura:

$$\int_0^{\pi} f(Re^{it})\,iRe^{it}dt+\int_{-R}^{+R} f(t)\,dt = 2\,i\pi\,\Sigma$$

Faisons maintenant croître R au delà de toute limite dans toute la région du plan qui est extérieure, aux discontinuités, on a par le théorème de Laurent (page 81)

$$f(z)=\frac{B_0}{z}+\frac{B_1}{z^2}+\frac{B_2}{z^3}+\dots\dots+\Phi(z)$$

Mais nous avons supposé que la fonction n'a pas de partie entière et que le degré du numérateur est inférieur de deux unités au degré du dénominateur, de sorte que $\Phi(z)$ et le coefficient B_0 sont nuls. Il en résulte que l'intégrale $\int_0^{\pi} f(Re^{it})\,iRe^{it}dt$ tend vers zéro, lorsque R augmente au delà de toute limite. Nous obtenons donc pour R infinis $J=2i\pi\Sigma$, en désignant par Σ la somme des résidus relatifs à tous les pôles de $f(z)$ situés au-dessus de ox.

Cette intégrale donne lieu à la remarque suivante.

Changeons de variable en remplaçant t par $\alpha t+\alpha'$ où α et α' sont des constantes; il est aisé de voir qu'on obtient ainsi:

$$J=\alpha\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{F(\alpha t+\alpha')}{G(\alpha t+\alpha')}\,dt,$$

ou bien,

$$J=-\alpha\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{F(\alpha t+\alpha')}{G(\alpha t+\alpha')}\,dt,$$

suivant qu'on suppose α positif ou négatif.

Mettons ensuite $\frac{b}{t}$ au lieu de t, et à cet effet, décomposons l'intégrale comme on l'a déjà fait p. 14 en écrivant:

$$J=\int_{-\infty}^{0}\frac{F(t)}{G(t)}\,dt+\int_0^{+\infty}\frac{F(t)}{G(t)}\,dt.$$

On aura, si l'on admet que b soit positif,

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{F(t)}{G(t)}\,dt = -b \int_{0}^{-\infty} \frac{F\left(\frac{b}{t}\right)}{t^2\, G\left(\frac{b}{t}\right)}\,dt,$$

$$= b \int_{-\infty}^{0} \frac{F\left(\frac{b}{t}\right)}{t^2\, G\left(\frac{b}{t}\right)}\,dt,$$

et semblablement;

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{F(t)}{G(t)}\,dt = b \int_{0}^{+\infty} \frac{F\left(\frac{b}{t}\right)}{t^2\, G\left(\frac{b}{t}\right)}\,dt,$$

d'où l'on conclut en ajoutant.

$$J = b \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{F\left(\frac{b}{t}\right)}{t^2\, G\left(\frac{b}{t}\right)}\,dt$$

mais nous trouverons en supposant b négatif:

$$J = -b \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{F\left(\frac{b}{t}\right)}{t^2\, G\left(\frac{b}{t}\right)}\,dt.$$

Cela étant je remplace la variable t par $\frac{k}{t+h}+l$ où h, k, l, sont des constantes quelconques; les résultats qui précèdent montrent qu'en désignant par ε, $+1$ ou -1 suivant que k est positif ou négatif on aura:

$$J = \varepsilon k \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{F\left(\frac{k}{t+h}+l\right)}{(t+h)^2\, G\left(\frac{k}{t+h}+l\right)}\,dt$$

Mettons enfin gt au lieu de g nous obtiendrons ainsi:

$$J = \varepsilon \varepsilon' g k \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{F\left(\frac{k}{gt+h}+l\right)dt}{(gt+h)^2\, G\left(\frac{k}{gt+h}+l\right)}$$

ε' étant $+1$ ou -1 suivant que g est positif ou négatif. Ce résultat peut s'écrire sous une forme plus simple qui mettra en évidence la conclusion à laquelle nous voulons arriver. Soit d'abord,

$$\frac{k}{gt+h} + l = \frac{g't+h'}{gt+h}$$

on trouve facilement:

$$g\ k = gh' - g'h,$$

on voit aussi qu'en exceptant le cas où g est nul, $\varepsilon\varepsilon'$ a le signe du déterminant $gh'-g'h$.

Soit de plus n et $n-2$ les degrés de $G(t)$ et $F(t)$ nous poserons:

$$(gt+h)^n\ G\left(\frac{g't+h'}{gt+h}\right) = G_1(t),$$

$$(gt+h)^{n-2}\, F\left(\frac{g't+h'}{gt+h}\right) = F_1(t).$$

L'expression de J devient donc:

$$J = \varepsilon\varepsilon'(gh'-g'h) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{G_1(t)}{F_1(t)}\,dt.$$

et l'on reconnait que son carré est un invariant simultané des polynômes $F(t)$ et $G(t)$. Ainsi dans le cas particulier où $G(t) = At^2+2Bt+C$, et $F(t)=1$, l'intégrale est une fonction de $AC-B^2$. Soit donc : $J = \varphi(AC-B^2)$, on aura en supposant $A = C$ et $B=0$,

$$\varphi(A^2) = \frac{1}{A}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dt}{t^2+1} = \frac{\pi}{A}$$

d'où se conclut la valeur :

$$J = \frac{\pi}{\sqrt{AC-B^2}}$$

Revenons à l'égalité :

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{F(t)}{G(t)}\,dt = 2i\pi\,\Sigma\,,$$

et admettons que l'équation $G(z)=0$ n'ait qu'une seule racine z_1 dans laquelle le coefficient de i soit positif. En supposant qu'elle soit simple le résidu auquel elle conduit sera $\frac{F(z_1)}{G'(z_1)}$, et nous aurons :

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{F(t)}{G(t)}\,dt = 2i\pi\frac{F(z_1)}{G'(z_1)},$$

ce qui donne le premier exemple de l'expression par une intégrale définie d'une fonction rationnelle d'une racine de l'équation algébrique de degré quelconque $G(z)=0$.

Soit en particulier $G(z) = Az^2+2Bz+C$, les coefficients étant réels ou imaginaires; posons $D = AC-B^2$, et :

$$z_1 = \frac{-B+\varepsilon i\sqrt{D}}{A}, \qquad z_2 = \frac{-B-\varepsilon i\sqrt{D}}{A}$$

ε désignant $+1$ ou -1, et ayant pour objet de fixer le signe du radical $\sqrt{D}$, de telle manière que le coefficient de i soit positif dans z_1 et par conséquent négatif dans z_2, d'après la supposition admise. La relation,

$$G'(z_1) = A\,(z_1-z_0)$$

donnera

$$G'(z_1) = 2\varepsilon i\sqrt{D}\,;$$

nous obtenons donc sans ambiguité de signe :

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dt}{At^2+2Bt+C} = \frac{\pi}{\varepsilon\sqrt{D}},$$

ou encore ;

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dt}{At^2+2Bt+C} = \frac{\varepsilon\pi}{\sqrt{D}}.$$

Dans le cas de $B=0$, par exemple, on a l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dt}{At^2+C}$ ou bien $2\int_0^{\infty}\frac{dt}{At^2+C}$, ou encore si l'on pose $t = \tang\frac{\varphi}{2}$, $2\int_0^{\pi}\frac{d\varphi}{A+C-(A-C)\cos\varphi}$, qui a pour valeur, $+\frac{\pi}{\sqrt{AC}}$ ou $-\frac{\pi}{\sqrt{AC}}$, suivant que le coefficient de i dans $\frac{i\sqrt{AC}}{A}$ et par conséquent suivant que le terme réel dans $\frac{\sqrt{AC}}{A}$ est positif ou négatif.

Je vais appliquer ce résultat en faisant : $A = x-\alpha-\sqrt{x^2-1}$, $C = x-\alpha+\sqrt{x^2-1}$, ce qui donne $AC = 1-2\alpha x+\alpha^2$.

Je supposerai que x ait une valeur imaginaire quelconque, mais j'admettrai que la constante α soit infiniment petite ; le signe du terme réel, dans la quantité $\frac{\sqrt{AC}}{A}$

sera donné alors par le signe de la partie réelle de l'expression $x - \sqrt{x^2-1}$.

Faisons avec Heine :

$$x - \sqrt{x^2-1} = \xi + i\eta ;$$

on aura :

$$2x = \xi + i\eta + \frac{1}{\xi + i\eta}$$

$$= \frac{\xi(1+\xi^2+\eta^2)}{\xi^2+\eta^2} + i\,\frac{\eta(1-\xi^2-\eta^2)}{\xi^2+\eta^2}$$

ce qui fait voir que le signe de ξ est celui de la partie réelle de x. On aura par conséquent, selon que cette partie réelle de x est positive ou négative

$$\int_0^\pi \frac{d\varphi}{x - \alpha - \sqrt{x^2-1}\cos\varphi} = \frac{\pi}{\sqrt{1-2\alpha x+\alpha^2}} \text{ ou } -\frac{\pi}{\sqrt{1-2\alpha x+\alpha^2}}$$

et de là se tire une conséquence importante.

Développons les deux membres de cette égalité suivant les puissances croissantes de α, nous obtiendrons en posant :

$$\frac{1}{\sqrt{1-2\alpha x+\alpha^2}} = 1 + \alpha X_1 + \cdots + \alpha^n X_n + ,$$

l'expression suivante :

$$X_n = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{d\varphi}{(x+\sqrt{x^2-1}\cos\varphi)^{n+1}}$$

si la partie réelle de la variable x est positive, et dans le cas contraire :

$$X_n = -\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{d\varphi}{(x+\sqrt{x^2-1}\cos\varphi)^{n+1}}$$

Faisons en second lieu, $A = 1-\alpha(x-\sqrt{x^2-1})$, $C = 1-\alpha(x+\sqrt{x^2-1})$ ce qui donnera encore $AC = 1-2\alpha x+\alpha^2$, on remarquera que pour α infiniment petit, le signe de la partie réelle de $\frac{\sqrt{1-2\alpha x+\alpha^2}}{1-\alpha(x-\sqrt{x^2-1})}$ ne dépend plus de x, de sorte qu'on a toujours, quelle que soit la valeur de cette variable :

$$\int_0^\pi \frac{d\varphi}{1-\alpha(x+\sqrt{x^2-1}\cos\varphi)} = \frac{\pi}{\sqrt{1-2\alpha x+\alpha^2}}$$

en prenant le second membre avec le signe +. L'expression de Jacobi :

$$X_n = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi (x+\sqrt{x^2-1}\cos\varphi)^n d\varphi$$

qui est la conséquence de cette formule, n'offre donc aucune discontinuité. La quantité X_n à laquelle nous avons été amenés est un polynôme entier en x du degré n auquel on donne le nom de polynôme de Legendre et qui joue un grand rôle en analyse. C'est à Laplace qu'est due la première expression, et l'on remarque qu'elle devient illusoire, lorsqu'on a :

$$x + \sqrt{x^2-1}\cos\varphi = 0$$

Cette condition revient à poser $x = i\cot\varphi$; on voit donc que φ croissant de zéro à π, la variable représente l'axe des ordonnées, qui est par conséquent une ligne de discontinuité pour l'intégrale.

Considérons maintenant la quantité :

$$J = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)^{n+1}}$$

dont la détermination demande le calcul du résidu de la fonction $\frac{1}{(1+t^2)^{n+1}}$ correspondant à un pôle multiple d'ordre $n+1$, $t=i$.

Il faut donc poser $t = i + h$, et obtenir le coefficient du terme en $\frac{1}{h}$, dans le développement suivant les puissances croissantes de h de la quantité $\frac{1}{(2ih+h^2)^{n+1}}$. En l'écrivant de cette manière

$$\frac{1}{h^{n+1}} (2i+h)^{-n-1}$$

on voit que la question revient à avoir le coefficient de h^n, dans la puissance $(2i+h)^{n-1}$, que je mettrai sous la forme $\frac{1}{(2i)^{n+1}}\left(1-\frac{ih}{2}\right)^{-n-1}$. Cela étant, la relation

$$(1-x)^{-n-1} = \Sigma \frac{(a+1)(a+2)\cdots(a+n)x^a}{1.2\ldots.n}$$

$$(a = 0, 1, 2, \ldots\ldots)$$

donne immédiatement en faisant $a = n$ et $x = \frac{ih}{2}$, l'expression :

$$\frac{1}{(2i)^{n+1}}\left(\frac{i}{2}\right)^n \frac{(n+1)(n+2)\cdots 2n}{1.2\ldots n}$$

Multiplions les deux termes de la fraction par $1.2\ldots. n$, elle devient ainsi :

$$\frac{1}{2i}\,\frac{1.2.3\ldots.2n}{2^{2n}(1.2\ldots n)^2}$$

ou encore :

$$\frac{1}{2i}\,\frac{1.2.3.\quad 2n}{(2.4.6.\ldots 2n)^2}$$

et en supprimant haut et bas le facteur commun, $2.4.6\ldots 2n$, on en conclut :

$$J = \frac{1.3.5\ldots 2n-1}{2.4.6\ldots 2n}\pi$$

Je m'arrêterai un moment à ce résultat afin de donner son expression asymptotique lorsqu'on suppose n très grand, j'aurai ainsi l'occasion d'appliquer dans un cas simple une méthode célèbre due à Laplace pour l'intégration approchée des différentielles qui renferment des facteurs élevés à de grandes puissances. (Théorie analytique les probabilités p. 97)

Écrivons d'abord :

$$J = 2\int_0^{\infty} \frac{dt}{(1+t^2)^{n+1}}$$

Je pose $1+t^2 = e^{x^2}$, ce qui donne :

$$\int_0^{\infty} \frac{dt}{(1+t^2)^{n+1}} = \int_0^{\infty} \frac{e^{-nx^2} x\,dx}{\sqrt{e^{x^2}-1}}$$

Cela étant, j'observe qu'on a par la formule de Maclaurin,

$$e^{x^2} = 1 + x^2 e^{\theta x^2}$$

θ désignant une quantité positive, moindre que l'unité. Remplaçons maintenant dans l'intégrale, $e^{x^2}-1$ par $x^2 e^{\theta x^2}$, nous obtenons.

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-nx^2} x\,dx}{\sqrt{e^{x^2}-1}} = \int_0^{\infty} e^{-\left(n+\frac{1}{2}\theta\right)x^2} dx,$$

et de là se conclut une limite supérieure et une limite inférieure, si l'on remplace successivement θ par zéro et par l'unité. D'après une formule connue ces limites sont: $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{n}}$ et $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{n+\frac{1}{2}}}$;

Ayant ainsi: $J < \sqrt{\frac{\pi}{n}}, J > \sqrt{\frac{\pi}{n+\frac{1}{2}}}$

nous voyons qu'on peut écrire:

$$J = \sqrt{\frac{\pi}{n+\varepsilon}}$$

ε étant compris entre zéro et $\frac{1}{2}$, et d'après la valeur précédente de J, on obtient ce résultat remarquable:

$$\frac{1.3.5. \quad 2n-1}{2.4.6.. \quad 2n} = \frac{1}{\sqrt{\pi(n+\varepsilon)}}$$

Je viens tout-à-l'heure, d'employer l'intégrale définie $\int_0^\infty e^{-gx^2}dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{g}}$; voici une méthode élémentaire pour l'obtenir. On sait qu'en posant $J_n = \int_0^1 \frac{x^n dx}{\sqrt{1-x^2}}$, on a la relation:

$$J_{n+1} = \frac{n+1}{n} J_{n-1}$$

et on en conclut

$$J_{2n} = \frac{1.3.5..2n-1}{2.4.6...2n}\frac{\pi}{2},$$

$$J_{2n+1} = \frac{2.4.6.. \ 2n}{3.5.7..2n+1},$$

cequi donne:

$$(2n+1)J_{2n}J_{2n+1} = \frac{\pi}{2}.$$

Cela étant j'observe que la limite du rapport $\frac{J_{2n+1}}{J_{2n}}$, pour n infini, est l'unité, car J_n décroissant lorsque n augmente on a les inégalités:

$$J_{2n} > J_{2n+1} > J_{2n+2}$$

ou bien:

$$J_{2n} > J_{2n+1} > \frac{2n+2}{2n+1}J_{2n}$$

On voit donc que $\frac{J_{2n+1}}{J_{2n}}$ est compris entre l'unité et la fraction $\frac{2n+2}{2n+1}$, qui est aussi l'unité pour n infini.

Ce point établi, l'égalité:

$$(2n+1)J^2_{2n+1}\frac{J_{2n}}{J_{2n+1}} = \frac{\pi}{2}$$

nous donne en faisant grandir n infiniment:

$$\text{Limite } (2n+1)J^2_{2n+1} = \frac{\pi}{2}$$

et par suite;

$$\text{Limite } \sqrt{n}\ J_{2n+1} = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}.$$

Posons maintenant $x^2 = 1 - z^2$ dans l'intégrale J_{2n+1}, nous aurons cette nouvelle expression:

$$J_{2n+1} = \int_0^1 (1-z^2)\, dz;$$

changeant ensuite z en $\frac{z}{\sqrt{n}}$, on obtient:

$$\sqrt{n}\ J_{2n+1} = \int_0^{\sqrt{n}} \left(1-\frac{z^2}{n}\right)^n dz,$$

et par conséquent pour n infini :

$$\text{Limite } \sqrt{n}\, J_{2n+1} = \int e^{-z^2} dz = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$$

Il suffit de poser ensuite $z = x\sqrt{g}$ pour avoir le résultat que nous voulions établir :

$$\int_0^{\infty} e^{-gx^2} dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{g}}$$

Considérons encore l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t^{2m} - t^{2m'}}{1 - t^{2n}} dt$

où m, m', n sont des nombres entiers positifs, m et n étant $< n$.

Les racines du dénominateur sont :

$$t = \cos\frac{k\pi}{n} + i\sin\frac{k\pi}{n},$$

en prenant : $k = 0, 1, 2, \ldots\ldots, 2n-1$.

La valeur $k = 0$, ou $t = 1$, ne donne pas de pôle, car alors $f(t)$ est finie, et il en est de même de $t = -1$, qui correspond à $k = n$.

Cela posé, on voit immédiatement que les pôles situés au dessus de l'axe Ox s'obtiennent en faisant : $k = 1, 2, 3, \ldots\ldots, n-1$; et le résidu relatif à l'un d'eux sera donné par la formule $A = \frac{t^{2m} - t^{2m'}}{-2n\; t^{2n-1}}$, ou simplement, puisqu'on a : $t^{2n} = 1$,

$$A = -\frac{t^{2m+1} - t^{2m'+1}}{2n}$$

Soit maintenant

$$u = \cos\frac{(2m+1)\pi}{n} + i\sin\frac{(2m+1)\pi}{n}$$

$$V = \cos\frac{(2m'+1)\pi}{n} + i\sin\frac{(2m'+1)\pi}{n}$$

la somme Σ des résidus relatifs aux pôles situés au-dessus de Ox est ainsi :

$$\Sigma = -\frac{1}{2n}\left[u + u^2 + \cdots + u^{n-1}) - (V + V^2 + \cdots + V^{n-1})\right]$$

$$= -\frac{1}{2n}\left[\frac{u^n - u}{u-1} - \frac{V^n - V}{V-1}\right]$$

Mais ayant $u^n = V^n = -1$, nous obtenons plus simplement :

$$\Sigma = \frac{1}{2n}\left(\frac{u+1}{u-1} - \frac{V+1}{V-1}\right).$$

Or on a :

$$\frac{u+1}{u-1} = \frac{1}{i}\cot\frac{(2m+1)}{2n}\pi, \quad \frac{V+1}{V-1} = \frac{1}{i}\cot\frac{(2m'+1)}{2n}\pi$$

par conséquent :

$$\Sigma = \frac{1}{2ni}\left(\cot\frac{2m+1}{2n}\pi - \cot\frac{2m'+1}{2n}\pi\right),$$

d'où l'on conclut :

$$J = \frac{\pi}{n}\left(\cot\frac{2m+1}{2n}\pi - \cot\frac{2m'+1}{2n}\pi\right).$$

Remarquons maintenant que la fonction $f(t)$ est paire ; nous pouvons donc écrire, en prenant zéro et l'infini pour limites et divisant par 2 :

$$\int_0^{\infty} \frac{t^{2m} - t^{2m'}}{1 - t^{2n}} dt = \frac{\pi}{2n}\left(\cot\frac{2m+1}{2n}\pi - \cot\frac{2m'+1}{2n}\pi\right).$$

Un cas particulier remarquable de cette intégrale s'obtient en mettant $2n$ à la place de n, et posant ensuite $m' = m + n$. La formule précédente devient ainsi :

$$\int_0^{\infty} \frac{t^{2m}(1 - t^{2n})}{1 - t^{4n}} dt = \frac{\pi}{4n}\left[\cot\frac{2m+1}{4n}\pi - \cot\left(\frac{\pi}{2} + \frac{2m+1}{4n}\pi\right)\right]$$

$$= \frac{\pi}{4n}\left(\cot\frac{2m+1}{4n}\pi + tg\,\frac{2m+1}{4n}\pi\right);$$

en simplifiant, on obtient le résultat suivant qui est dû à Euler :

$$\int_0^{\infty} \frac{t^{2m}}{1+t^{2n}}\, dt = \frac{\pi}{2n \sin \frac{2m+1}{2n}\pi}$$

Remarquons enfin qu'en changeant de variable et faisant $t = e^x$, on trouve :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{(2m+1)x} - e^{(m'+1)x}}{1-e^{2nx}}\, dx = \frac{\pi}{2n}\left[\cot \frac{2m+1}{2n}\pi - \cot \frac{2m'+1}{2n}\pi\right]$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{(2m+1)x}}{1+e^{2nx}}\, dx = \frac{\pi}{2n \sin \frac{2m+1}{2n}\pi}$$

Mettons encore $\frac{x}{2n}$ au lieu de x, et posons pour abréger :

$$\frac{2m+1}{2n} = a, \qquad \frac{2m'+1}{2n} = b,$$

nous aurons les formules suivantes :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ax} - e^{bx}}{1-e^{x}}\, dx = \pi(\cot a\pi - \cot b\pi)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ax}\, dx}{1+e^{x}} = \frac{\pi}{\sin a\pi},$$

où a et b peuvent représenter, avec autant d'approximation qu'on le veut, deux quantités réelles quelconques moindres que l'unité.

Ce dernier résultat ouvre la voie à une nouvelle application que nous ferons du théorème de Cauchy. Nous généraliserons l'expression $\frac{e^{ax}}{1+e^x}$, en posant :

$$f(x) = \frac{e^{ax} F(e^x)}{G(e^x)},$$

où $G(z)$ et $F(z)$ sont des polynômes entiers en z, et afin que l'intégrale :

$$J = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, dt$$

soit finie et déterminée, nous poserons les conditions suivantes :

J'admettrai que la fraction $\frac{F(z)}{G(z)}$ soit sans partie entière, que son dénominateur n'ait aucune racine positive et que la constante a, ou sa partie réelle si elle est imaginaire, soit positive et moindre que l'unité. Cela étant, on voit que $f(z)$ sera finie pour toutes les valeurs réelles de z, et qu'en supposant $z = x + iy$, la fonction s'évanouira pour des valeurs infinies positives ou négatives de x. Dans le premier cas en effet, le numérateur de l'expression $\frac{e^{az}F(e^z)}{G(e^z)}$ croît infiniment moins rapidement que le dénominateur ; ensuite pour des valeurs négatives de x, c'est le facteur exponentiel e^{az} qui s'évanouit.

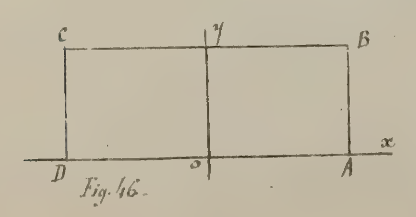


Fig. 46.

Je prends maintenant pour contour d'intégration un rectangle ABCD (fig 46) ayant sa base sur l'axe des x, et divisé symétriquement par l'axe des y.

Soit Σ la somme des résidus de la fonction pour tous les pôles qui sont à son intérieur, nous aurons la relation :

$$(DA) + (AB) + (BC) + (CD) = 2i\pi\, \Sigma.$$

Posons encore : $OA = OD = p$, et $AB = q$;
les intégrales qui figurent dans le premier membre seront :

$$(DA) = \int_{-p}^{+p} f(t)\,dt, \qquad (AB) = i\int_0^q f(p+it)\,dt,$$

$$(BC) = -\int_{-p}^{+p} f(iq+t)\,dt, \qquad (CD) = -i\int_0^q f(-p+it)\,dt.$$

Cela étant, je suppose en particulier $q = 2\pi$, la fonction $f(z)$ donnant lieu à la relation :
$$f(2i\pi + z) = e^{2ia\pi} f(z),$$
on en conclut :

$$(BC) = -e^{2ia\pi}(DA).$$

Faisant ensuite croître indéfiniment la constante p, les quantités $f(-p+it)$, $f(p+it)$, deviennent nulles, on a donc : $(CD) = 0$, $(AB) = 0$; d'ailleurs $(DA) = J$, et nous obtenons la valeur cherchée :
$$J = \frac{2i\pi}{1-e^{2ia\pi}}\Sigma$$
ou encore :
$$J = -\frac{\pi e^{-ia\pi}}{\sin a\pi}\Sigma.$$

Considérons maintenant pour déterminer les résidus, le cas le plus facile, où l'équation $G(e^x) = 0$ n'a pas de racines simples.

Soit $x = \xi$, l'une d'elles, la dérivée par rapport à x de la fonction $G(e^x)$ étant $e^x G'(e^x)$, le résidu correspondant sera :
$$\frac{e^{a\xi} F(e^{\xi})}{e^{\xi} G'(e^{\xi})}$$
d'après ce qu'on a établi p(110), ou plus simplement :
$$\frac{e^{\xi(a-1)} F(e^{\xi})}{G'(e^{\xi})}.$$

Par exemple, dans le cas de $G(e^x) = e^x + 1$, nous aurons $\xi = i\pi$; en supposant $G_1 = 1$ le résidu unique est donc $e^{i(a-1)\pi}$, de sorte qu'on trouve :
$$J = -\frac{\pi e^{-ia\pi}}{\sin a\pi} e^{i(a-1)\pi} = \frac{\pi}{\sin a\pi}.$$

Les considérations précédentes donnent encore la valeur de l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ax} - e^{bx}}{1-e^x}\,dx$, comme je vais le montrer. Je reviens pour cela à la relation :
$$(DA) + (AB) + (BC)\,(CD) = 2i\pi\,\Sigma,$$
et je suppose $f(z) = \frac{e^{az} - e^{bz}}{1-e^z}$, mais au lieu de prendre $q = 2\pi$, je fais $q = \pi$. Il n'existera donc aucun pôle à l'intérieur du rectangle et nous aurons $\Sigma = 0$. En admettant ensuite que les constantes a et b aient leurs parties réelles positives et moindres que l'unité, les quantités $f(-p+it)$ et $f(p+it)$ seront nulles pour p infini. Ayant dans cette hypothèse $(CD) = 0$, $(AB) = 0$ notre relation devient :
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt - \int_{-\infty}^{+\infty} f(i\pi + t)\,dt = 0.$$

Elle donne ainsi l'intégrale cherchée, attendu que :

$$f(i\pi+t)=\frac{e^{i\pi a}e^{at}}{1+e^t}-\frac{e^{i\pi b}e^{bt}}{1+be^t},$$

nous obtenons donc :

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\,dt=e^{i\pi a}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{at}dt}{1+e^t}-e^{i\pi b}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{bt}dt}{1+e^t}$$

$$=\pi\left[\frac{e^{i\pi a}}{\sin a\pi}-\frac{e^{i\pi b}}{\sin b\pi}\right]$$

et en simplifiant :

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\,dt=\pi(\cot a\pi-\cot b\pi).$$

Je m'arrêterai un instant à ce résultat dont on tire en supposant $b=1-a$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{at}-e^{(1-a)t}}{1-e^t}dt=2\pi\cot a\pi.$$

Nous avons ainsi une expression de la fonction $\cot a\pi$ essentiellement bornée aux valeurs de a dont la partie réelle est positive et moindre que l'unité, l'intégrale définie n'ayant plus de sens, pour a négatif ou supérieur à un. Retrouver, en partant de cette formule, l'expression analytique générale est une question intéressante qui appelle l'attention ; elle nous servira de préparation à la recherche plus difficile qui conduit à la découverte d'une fonction entièrement nouvelle en partant d'une définition restreinte, dont nous donnerons plus tard des exemples.

Je remarque dans ce but que la fonction $\frac{e^{at}-e^{(1-a)t}}{1-e^t}$ étant paire, comme on le voit, en l'écrivant sous cette forme : $\frac{e^{(a-\frac{1}{2})t}-e^{-(a-\frac{1}{2})t}}{e^{-\frac{1}{2}t}-e^{\frac{1}{2}t}}$, nous pouvons poser :

$$\pi\cot a\pi=\int_{-\infty}^{0}\frac{e^{at}-e^{(1-a)t}}{1-e^t}dt.$$

Cela étant, je tire de l'intégrale définie, au moyen de l'identité

$$\frac{1}{1-e^t}=1+e^t+e^{2t}+\cdots+e^{(n-1)t}+\frac{e^{nt}}{1-e^t},$$

et en employant les formules élémentaires, où k désigne un nombre entier positif :

$$\int_{-\infty}^{0}e^{(k+a)t}dt=\frac{1}{k+a},\quad\int_{-\infty}^{0}e^{(k+1-a)t}dt=\frac{1}{k+1-a}$$

le résultat suivant

$$\pi\cot a\pi=\frac{1}{a}+\frac{1}{1+a}+\cdots+\frac{1}{n-1+a}$$

$$-\frac{1}{1-a}-\frac{1}{2-a}+\cdots-\frac{1}{n-a}$$

$$+\int_{-\infty}^{0}\frac{e^{nt}[e^{at}-e^{(1-a)t}]}{1-e^t}dt.$$

$$=\frac{1}{a}+\sum\frac{2a}{a^2-n^2}-\frac{1}{n+a}$$

$$+\int_{-\infty}^{0}\frac{e^{nt}[e^{at}-e^{(1-a)t}]}{1-e^t}dt$$

C'est l'expression de $\cot a\pi$ par une somme finie de fractions simples et un terme

complémentaire qui devient nul pour n infini, sous la condition que la variable a soit limitée, comme nous l'avons dit, il est donc prouvé que l'on a :

$$\pi \cot a\pi = \frac{1}{a} + \sum \frac{2a}{a^2 - n^2}$$

$$(n = 1, 2, 3, \ldots\ldots)$$

Mais la série ainsi obtenue est convergente pour toute valeur de la variable et représente une fonction uniforme ; le théorème de Riemann nous donne donc la conclusion qu'elle est égale dans tout le plan à $\cot a\pi$, puisque l'égalité a lieu lorsqu'on suppose la variable comprise entre zéro et l'unité.

Après avoir indiqué succinctement comment le théorème de Cauchy sert à la détermination des intégrales définies, nous montrerons son importance sous un autre point de vue, en l'appliquant à la théorie des premières transcendantes de l'analyse qui sont des fonctions rationnelles de $\sin x$ et $\cos x$. Je me propose d'en obtenir l'expression, sous la même forme que celles des fractions rationnelles décomposées en fractions simples, c'est-à-dire de les représenter par une combinaison linéaire des quantités $\cot \frac{x-a}{2}$, $\cot \frac{x-b}{2}$, etc et leurs dérivées, qui joueront ainsi le rôle d'éléments simples, analogues à $\frac{1}{x-a}$, $\frac{1}{x-b}$, etc, et leurs puissances ou dérivées, des divers ordres.

Soit en effet :

$$f(z) = \frac{F(\sin z, \cos z)}{G(\sin z, \cos z)}$$

le numérateur et le dénominateur désignant des polynômes entiers en $\sin z$ et $\cos z$. J'ai montré ailleurs comment le résultat auquel nous voulons parvenir s'obtient par un procédé élémentaire en considérant $f(z)$ comme une fonction rationnelle de la quantité e^{iz}, que je représenterai par u. On est ainsi amené à séparer une partie entière $\Pi(z)$, composée de puissances entières de e^{iz}, positives ou négatives, et à écrire :

$$f(z) = \Pi(z) + \Phi(z)$$

où le second terme est par rapport à u une fraction proprement dite, finie pour u infiniment grand et aussi pour $u = 0$ son dénominateur ne contenant pas le facteur u. C'est cette fonction $\Phi(z)$ que j'envisage pour en faire l'intégration en suivant le contour d'un rectangle $ABCD$ (fig. 47) symétrique par rapport à l'axe des abcisses, et où je suppose

$$OM = x_0, \qquad MN = 2\pi, \qquad NA = NB = p.$$

Fig. 47.

Si nous désignons par Σ la somme des résidus de $\Phi(z)$ correspondant aux pôles situés à l'intérieur de ce rectangle le théorème de Cauchy donne la relation :

$$(AB) + (BC) + (CD) + (DA) = 2i\pi\Sigma.$$

Mais nous avons : $(DC) = i\int_{-a}^{+a} \Phi(x_0 + it)\,dt$,

$$(AB) = i\int_{-a}^{+a} \Phi(x_0 + 2\pi + it)\,dt ;$$

les deux intégrales sont donc égales d'après la condition : $\Phi(z + 2\pi) = \Phi(z)$,

ayant ainsi : $(AB)-(DC)=0$, ou bien : $(AB)+(CD)=0$,
l'équation précédente devient plus simplement : $(DA)+(BC)=2i\pi\Sigma$
ou bien : $\int_0^{2\pi}\Phi(x_0-ia+t)\,dt-\int_0^{2\pi}\Phi(x_0+ia+t)\,dt=2i\pi\Sigma$

Cela posé, je fais croître indéfiniment la constante positive a et j'observe que si nous posons successivement : $z=x_0-ia+t$ et $z=x_0+ia+t$, la quantité $u=e^{iz}$ devient infinie dans le premier cas et nulle dans le second. Soit donc G et H les valeurs correspondantes que prend la fonction $\Phi(z)$ lorsqu'après avoir introduit la variable u, on y suppose u infini et égal à zéro, nous aurons pour a infiniment grand :

$$(DA)=\int_0^{2\pi}\Phi(x_0-ia+t)\,dt=2\pi G,$$

$$(CB)=\int_0^{2\pi}\Phi(x_0+ia+t)\,dt=2\pi H,$$

et par conséquent : $$G-H=i\Sigma.$$

Nous obtenons donc cette relation fort simple :

$$i(H-G)=\Sigma,$$

qui donne au moyen des constantes G et H la somme des résidus de $\Phi(z)$ pour tous ses pôles compris entre les parallèles indéfinies AB et CD.

Je vais l'appliquer au produit $\cot\frac{x-z}{2}\,\Phi(z)$ et parvenir ainsi à l'expression cherchée de la fraction $\Phi(x)$

Observons tout d'abord qu'ayant

$$\cot\frac{x-z}{2}=i\,\frac{e^{i(x-z)}+1}{e^{i(x-z)}-1}$$

$$=i\,\frac{e^{ix}+u}{e^{ix}-u},$$

cette quantité est égale à $-i$ pour u infini et à $+i$ pour $u=0$. Par conséquent les valeurs de $\cot\frac{x-z}{2}\,\Phi(z)$ sont alors : $-iG$ et iH, et la somme des résidus de cette fonction qui correspondent d'une part aux pôles de $\Phi(z)$, et de l'autre au pôle unique $z=x$, appartenant au facteur $\cot\frac{x-z}{2}$, s'exprime par $-G-H$

Soit maintenant $z=a$ un pôle quelconque de $\Phi(z)$, le résidu à déterminer est donné par le coefficient de $\frac{1}{h}$ dans le développement suivant les puissances croissantes de h, de l'expression

$$\cot\frac{x-a-h}{2}\,\Phi(a+h)$$

Or, on a par la série de Taylor

$$\cot\frac{x-a-h}{2}=\cot\frac{x-a}{2}-\frac{h}{1}D_x\cot\frac{x-a}{2}+\dots+\frac{(-1)^n h^n}{1.2..n}D_x^n\cot\frac{x-a}{2}+\dots$$

puis, si l'on admet que le pôle considéré soit d'ordre $n+1$ de multiplicité :

$$\Phi(a+h)=\frac{A}{h}+\frac{A_1}{h^2}+\dots\dots\dots+\frac{A_n}{h^{n+1}}+\dots\dots$$

les termes omis ne contenant que des puissances positives de h. Mais il est préférable pour la simplicité, d'écrire ce développement sous la forme suivante :

$$\Phi(a+h)=A\frac{1}{h}+A_1D_h\frac{1}{h}+\dots\dots+A_nD_h^n\frac{1}{h}+\dots\dots$$

Si l'on remarque, en effet, que l'on a $D_h^i\frac{1}{h}=\frac{(-1)^i1.2\dots i}{h^{i+1}}$, le coefficient du terme en

$\frac{1}{h}$ dans le produit des deux séries, a pour valeur.

$$A \cot \frac{x-a}{2} + A_1 D_x \cot \frac{x-a}{2} + \cdots + A_n D_x^n \cot \frac{x-a}{2};$$

la somme des résidus qui correspondent aux pôles de la fonction $\Phi(z)$ est donc représentée par:

$$\Sigma \left[A \cot \frac{x-a}{2} + A_1 D_x \cot \frac{x-a}{2} + \cdots + A_n D_x^n \cot \frac{x-a}{2}\right].$$

En dernier lieu à l'égard du pôle $z=x$, nous écrirons la fonction proposée de cette manière:

$$\frac{\cos \frac{x-z}{2} \Phi(z)}{\sin \frac{x-z}{2}}$$

il suffit alors de poser: $z=x$ dans le quotient:

$$\frac{\cos \frac{x-z}{2} \Phi(z)}{D_z \sin \frac{x-z}{2}}$$

et l'on obtient pour le résidu: $-2\Phi(x)$. La relation déduite du théorème de Cauchy est donc:

$$-G-H = \left[A \cot \frac{x-a}{2} + A_1 D_x \cot \frac{x-a}{2} + \cdots + A_n D_x^n \cot \frac{x-a}{2}\right] - 2\Phi(x);$$

on en conclut l'expression de la fonction $\Phi(x)$, sous la forme suivante:

$$\Phi(x) = \frac{G+H}{2} + \frac{1}{2} \Sigma \left[A \cot \frac{x-a}{2} + A_1 D_x \cot \frac{x-a}{2} + \cdots + A_n D_x^n \cot \frac{x-a}{2}.\right]$$

Je ne m'étendrai pas davantage sur cette question, qui a été traitée sous un autre point de vue dans mon Cours d'analyse de l'École Polytechnique (p. 321), et j'arrive à un dernier exemple de détermination d'intégrales définies au moyen de résidus.

Soit $f(z)$ une fonction holomorphe dans une aire limitée par le contour S, en désignant par x et a les affixes de deux points de cette aire, l'intégrale.

$$\frac{1}{2i\pi} \int_S \frac{(x-a)^n f(z)}{(z-a)^n (z-x)} dz$$

aura pour valeur la somme des résidus de la fonction $\frac{(x-a)^n f(z)}{(z-a)^n (z-x)}$ qui correspondent à $z=x$ et $z=a$. Cela étant, on voit comme tout-à-l'heure que le premier est $f(x)$. Pour obtenir le second, je pose $z=a+h$, et je développe, suivant les puissances de h, les deux facteurs $\frac{1}{z-x}$ et $\frac{(x-a)^n f(z)}{(z-a)^n}$. Nous avons d'abord:

$$\frac{1}{z-x} = -\left[\frac{1}{x-a} + \frac{h}{(x-a)^2} + \cdots + \frac{h^{n-1}}{(x-a)^n}\right] - \cdots\cdots,$$

le second facteur donne ensuite la série:

$$\frac{(x-a)^n f(a+h)}{h^n} = (x-a)^n \left[f(a)\frac{1}{h^n} + \frac{f'(a)}{1}\frac{1}{h^{n-1}} + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{1.2,\ldots n-1}\frac{1}{h}\right] + \cdots$$

Il n'y a donc plus qu'à chercher le coefficient du terme en $\frac{1}{h}$, dans le produit des deux développements. Un calcul facile montre que si l'on pose:

$$\Pi(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1}(x-a) + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{1.2,\ldots n-1}(x-a)^{n-1}$$

ce coefficient est le polynôme $\Pi(x)$ changé de signe. Le résultat ainsi obtenu:

$$\frac{1}{2i\pi} \int_S \frac{(x-a)^n f(z)}{(z-a)^n (z-x)} dx = f(x) - \Pi(x)$$

n'est autre chose que la formule de Taylor; mais la marche suivie pour retrouver une formule déjà connue met sur la voie pour parvenir à une autre, qui est nouvelle.

Désignons par $a, b, \ldots l$ et x les affixes d'un nombre quelconque de points à l'intérieur du contour S, et soit:

$$F(z) = (z-a)^{\alpha}(z-b)^{\beta}\ldots\ldots(z-l)^{\lambda}$$

les exposants $\alpha, \beta, \ldots \lambda$ étant des nombres entiers. L'intégrale

$$\frac{1}{2i\pi}\int_S \frac{F(x)f(z)}{F(z)(z-x)}dz,$$

de forme toute semblable à la précédente s'obtient par le même calcul. Le résidu de la fonction $\frac{F(x)f(z)}{F(z)(z-x)}$ pour $z=x$ est encore $f(x)$, et en faisant $\alpha+\beta+\ldots\ldots+\lambda = n$, on trouve aisément que les autres résidus correspondant aux valeurs $z = a, b, \ldots\ldots l$, sont des polynômes entiers en x de degré $n-1$. En représentant leur somme par $-\Pi(x)$ nous aurons donc:

$$\frac{1}{2i\pi}\int_S \frac{F(x)f(z)}{F(z)(z-x)}dz = f(x) - \Pi(x);$$

J'indiquerai succinctement les conséquences à tirer de cette relation. Je remarque, en premier lieu, que l'intégrale du premier membre contenant en facteur le polynôme $F(x)$ s'annule ainsi que ses dérivées par rapport à x jusqu'à l'ordre $\alpha-1$ pour $x=a$, jusqu'à l'ordre $\beta-1$ pour $x=b$, etc. Le polynôme $\Pi(x)$ donne par suite la solution du problème d'interpolation dont l'objet est d'obtenir une fonction entière du degré $n-1$, satisfaisant aux conditions suivantes dont le nombre est n, à savoir:

$$\begin{array}{lll}
\Pi(a) = f(a), & \Pi'(a) = f'(a) & \Pi^{\alpha-1}(a) = f^{\alpha-1}(a) \\
\Pi(b) = f(b), & \Pi'(b) = f'(b) & \Pi^{\beta-1}(b) = f^{\beta-1}(b) \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
\Pi(l) = f(l), & \Pi'(l) = f'(l) & \Pi^{\lambda-1}(l) = f^{\lambda-1}(l)
\end{array}$$

J'observe ensuite qu'en désignant par ζ l'affixe d'un point du contour d'intégration, par σ le périmètre de ce contour et par θ un facteur dont le module ne peut dépasser l'unité, on peut écrire:

$$\frac{\sigma\theta}{2\pi}\,\frac{F(x)f(\zeta)}{F(\zeta)(\zeta-x)} = f(x) - \Pi(x).$$

Admettons maintenant que les circonférences décrites des points $a, b, \ldots l$ comme centres, et passant par le point x, soient à l'intérieur de la courbe S, on aura ainsi: $\text{Mod}(x-a) < \text{Mod}(\zeta-a)$, $\text{Mod}(x-b) < \text{Mod}(\zeta-b)\ldots\ldots \text{Mod}(x-l) < \text{Mod}(\zeta-l)$.

Ces conditions font voir que le polynome $\Pi(x)$ représente la fonction quelconque $f(x)$, avec d'autant plus d'approximation que les exposants $\alpha, \beta, \ldots\ldots \lambda$ sont plus élevés ou que le nombre des quantités $a, b, \ldots\ldots l$ est plus grand. L'expression obtenu pour la différence $f(x) - \Pi(x)$ diminue, en effet, sans limite, quelque soit la valeur de la variable x, à l'intérieur du contour S. Je renverrai pour les applications de ce résultat au calcul approché des intégrales définies à un article du Journal de Borchardt: Sur la formule d'interpolation de Lagrange, T. 84, p. 70, et j'indiquerai ainsi dans le même ordre d'idées une note de M. Mansion: Détermination du reste dans la formule de quadrature de Gauss, Comptes-Rendus T. CII, p. 412.

14e Leçon.

Legendre a donné le nom d'intégrales Eulériennes de première et seconde espèce aux expressions : $\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx$ et $\int_0^1 e^{-x}x^{a-1}dx$, qui ont été le sujet de plusieurs beaux mémoires d'Euler, et auxquelles il a consacré lui-même une partie de ses Exercices de Calcul intégral. Leur étude qui est d'un grand intérêt, a pris une importance nouvelle depuis ces illustres geomètres, en conduisant à la notion d'une nouvelle transcendante qui est une fonction uniforme de la variable, se plaçant immédiatement après les fonctions circulaires auxquelles elle est étroitement liée. Nous exposerons succinctement cette étude et en suivant la marche historique, nous établirons d'abord leurs propriétés par la voie du Calcul intégral, sous le premier point de vue qui les a fait découvrir.

Soit d'après la notation de Legendre :

$$\Gamma(a) = \int_0^\infty e^{-x}x^{a-1}dx,$$

Nous remarquerons que pour une valeur réelle et positive de a différente de zéro, l'intégrale dont la limite supérieure est infinie est toujours une quantité finie

Ecrivons en effet ;

$$\int_0^\infty e^{-x}x^{a-1}dx = \int_0^1 e^{-x}x^{a-1}dx + \int_1^\infty e^{-x}x^{a-1}dx\ ;$$

on voit qu'en supposant $a < 1$, le premier terme est fini, bien que la fonction sous le signe d'intégration devienne infinie pour $x = 0$, cette conclusion toutefois n'ayant plus lieu si l'on fait $a = 0$. Quant au second terme, on remarquera que dans le champ de l'intégration, l'expression $x^{a-1}e^{-x}$ augmente avec a de sorte que n désignant un entier supérieur à a, nous avons :

$$\int_1^\infty e^{-x}x^{a-1}dx < \int_1^\infty e^{-x}x^{n-1}dx$$

et a fortiori

$$\int_1^\infty e^{-x}x^{a-1}dx < \int_0^\infty e^{-x}x^{n-1}dx$$

c'est-à-dire :

$$\int_1^\infty e^{-x}x^{a-1}dx < 1.2 \ldots n-1$$

Ce point établi, la première propriété de $\Gamma(a)$ se tire de l'identité,

$$D_x\,(e^{-x}x^a) = a e^{-x}x^{a-1} - e^{-x}x^a,$$

en intégrant les deux membres entre les limites $x = 0$ et $x = \infty$. La quantité $e^{-x}x^a$ s'annulant pour ces valeurs on obtient immédiatement la relation fondamentale :

$$\Gamma(a+1) = a\,\Gamma(a).$$

Nous en concluons en changeant successivement a en $a+1$, $a+2$, ... $a+n-1$:

$$\Gamma(a+2) = (a+1)\Gamma(a+1)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\Gamma(a+n) = (a+n-1)\Gamma(a+n-1)$$

et par conséquent :

$$\Gamma(a+n) = (a+1)\ldots\ldots(a+n-1)\Gamma(a).$$

Considérons maintenant l'intégrale de première espèce et posons suivant l'usage:

$$B(a,b) = \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx$$

a et b étant positifs et différents de zéro. Nous remarquerons d'abord qu'on peut aisément trouver sous forme explicite l'expression de l'intégrale dans le cas où b est un nombre entier, que je désignerai par n.

Partant à cet effet de l'égalité :

$$\int_0 x^{a-1}dx = \frac{1}{a}$$

je change a en $a+1$, ce qui donne :

$$\int_0^1 x^a dx = \frac{1}{a+1}$$

en retranchant membre à membre, on aura donc :

$$\int_0^1 x^{a-1}(1-x) = \frac{1}{a\,(a+1)}$$

Remplaçons a par $a+1$ dans cette égalité, et retranchons membre à membre, nous aurons :

$$\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^2 dx = \frac{2}{a(a+1)(a+2)}$$

et en continuant de proche en proche, il est clair qu'on trouvera :

$$\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{n-1}dx = \frac{1.2\ldots\;\; n-1}{a\,(a+1)(a+n-1)}$$

L'expression que nous venons d'obtenir, au moyen des relations :

$$\Gamma(n) = 1.2\ldots\; n-1$$
$$\Gamma(a+n) = a(a+1)\ldots\ldots(a+n-1)\Gamma(a)$$

peut s'écrire ainsi :

$$B(a,n) = \frac{\Gamma(a)\,\Gamma(n)}{\Gamma(a+n)}$$

J'ajoute que l'on aurait de même pour toute valeur de b:

$$B(n,b) = \frac{\Gamma(b)\,\Gamma(n)}{\Gamma(b+n)}\;;$$

c'est en effet la conséquence de l'égalité,

$$B(a,b) = B(b,a)$$

qui se démontre immédiatement en changeant x en $1-x$ dans l'intégrale de

première espèce. Ces égalités mettent sur la voie de la relation plus générale,

$$B(a,b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$$

où a et b sont quelconques, qui est d'une grande importance et que nous allons maintenant établir.

J'emploie dans ce but une expression nouvelle de l'intégrale de première espèce qu'on trouve par ce changement de variable,

$$x = \frac{y}{1+y}$$

Il vient ainsi :

$$B(a,b) = \int_0^\infty \frac{y^{a-1}dy}{(1+y)^{a+b}}$$

et par conséquent

$$B(a,b)\Gamma(a,b) = \int_0^\infty \frac{\Gamma(a,b)y^{a-1}dy}{(1+y)^{a+b}}$$

J'observe encore qu'en remplaçant x par g x dans l'intégrale de seconde espèce, on obtient l'égalité suivante :

$$\frac{\Gamma(a)}{g^a} = \int_0^\infty e^{-gx}x^{a-1}dx$$

d'où l'on conclut :

$$\frac{\Gamma(a+b)}{(1+y)^{a+b}} = \int_0^\infty e^{-x(1+y)}x^{a+b-1}dx$$

Nous pouvons par suite exprimer le produit $B(a,b)\Gamma(a+b)$ au moyen d'une intégrale double dont l'expression s'obtient de la manière la plus facile. Ayant en effet :

$$B(a,b)\Gamma(a,b) = \int_0^\infty e^{-x}x^{a+b-1}\cdot e^{-xy}y^{a-1}dx\,dy,$$

Nous effectuerons d'abord l'intégration par rapport à y, qui donne pour résultat, $\frac{\Gamma(a)}{x^a}$. L'intégrale double est donc ainsi ramenée à l'intégrale simple :

$$\Gamma(a)\int_0^\infty e^{-x}x^{b-1}dx = \Gamma(a)\Gamma(b).$$

Nous avons par suite,

$$B(a,b)\Gamma(a+b) = \Gamma(a)\Gamma(b)$$

d'où la relation

$$B(a,b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$$

qu'il s'agissait de démontrer.

En voici une première conséquence ; supposons $a+b=1$, l'expression précédemment employée de $B(a,b)$ donne dans ce cas l'intégrale : $\int_0^\infty \frac{y^{a-1}dy}{1+y} = \frac{\pi}{\sin a\pi}$ (voir page), nous avons par suite l'équation :

$$\Gamma(a)\Gamma(1-a) = \frac{\pi}{\sin a\pi}$$

Nous en déduirons en second lieu par une méthode ingénieuse due au géomètre belge Schaar, les intégrales définies qui représentent la dérivée logarithmique

et le logarithme de $\Gamma(a)$.

Elle consiste à employer les deux égalités

$$\frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)} = \int_0^\infty \frac{x^{b-1}dx}{(1+x)^{a+b}},$$

$$\Gamma(b) = \int_0^\infty e^{-x} x^{b-1} dx,$$

et à les retrancher membre à membre. En remarquant qu'on peut écrire :

$$\Gamma(b) - \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)} = \frac{\Gamma(b)[\Gamma(a+b) - \Gamma(a)]}{\Gamma(a+b)}$$

$$= \frac{b\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}\left[\frac{\Gamma(a+b) - \Gamma(a)}{b}\right]$$

$$= \frac{\Gamma(b+1)}{\Gamma(a+b)}\left[\frac{\Gamma(a+b) - \Gamma(a)}{b}\right]$$

Nous obtenons ainsi :

$$\frac{\Gamma(b+1)}{\Gamma(a+b)}\left[\frac{\Gamma(a+b) - \Gamma(a)}{b}\right] = \int_0^\infty \left[e^{-x} - \frac{1}{(1+x)^{a+b}}\right] x^{b-1} dx$$

Supposons maintenant la quantité b infiniment petite, on trouvera en passant à la limite :

$$\frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)} = \int_0^\infty \left[e^{-x} - \frac{1}{(1+x)^a}\right]\frac{dx}{x}$$

Nous parviendrons à une autre expression en substituant dans l'intégrale $\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx$, l'exponentielle e^{-x} à la variable x, et remplaçant la première équation par celle-ci :

$$\frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)} = \int_0^\infty e^{-ax}(1-e^{-x})^{b-1} dx.$$

Le même calcul donne alors :

$$\frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)} = \int_0^\infty \left(\frac{e^{-x}}{x} - \frac{e^{-ax}}{1-e^{-x}}\right) dx.$$

et plus simplement si l'on change x en $-x$:

$$\frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)} = \int_{-\infty}^0 \left(\frac{e^{ax}}{e^x - 1} - \frac{e^x}{x}\right) dx$$

C'est cette seconde formule qu'il convient d'employer pour parvenir à l'expression de $\log \Gamma(a)$; en effet il vient facilement si l'on intègre par rapport à la quantité a, entre deux limites quelconques a et b :

$$\frac{\Gamma(a)}{\Gamma(b)} = \int_{-\infty}^0 \left[\frac{e^{ax} - e^{bx}}{e^x - 1} - (a-b)e^x\right]\frac{dx}{x}$$

d'où pour $b = 1$,

$$\log \Gamma(a) = \int_{-\infty}^0 \left[\frac{e^{ax} - e^x}{e^x - 1} - (a-1)e^x\right]\frac{dx}{x}$$

A ces premiers résultats nous joindrons maintenant la valeur de l'intégrale définie

$$J = \int_a^{a+1} \log \Gamma(x)\, dx,$$

découverte par Raabe ; voici pour y parvenir la méthode ingénieuse et élégante de Mr Matyas Lerch, docent à l'École Polytechnique Tchèque de Prague. Elle consiste à remplacer x par $a+\xi$ ce qui donne,

$$J = \int_0^1 \log \Gamma(a+\xi)\, d\xi$$

puis à différentier par rapport à a, Nous obtenons par là,

$$D_a J = \log \Gamma(a+1) - \log \Gamma(a)$$
$$= \log a$$

et par conséquent, en désignant par C une constante :

$$J = a \log a - a + C$$

Pour déterminer la valeur de C, nous remarquerons que $a\log a - a$ s'évanouit pour $a=0$, on a donc :

$$C = \int_0^1 \log \Gamma(\xi)\, d\xi$$

Changeons maintenant ξ en $1-\xi$, il viendra ainsi :

$$C = \int_0^1 \log \Gamma(1-\xi)\, d\xi,$$

et en ajoutant membre à membre

$$2C = \int_0^1 \log\left[\Gamma(\xi)\Gamma(1-\xi)\right] d\xi$$

Cela étant, la relation

$$\Gamma(\xi)\,\Gamma(1-\xi) = \frac{\pi}{\sin \pi\xi}$$

permet d'écrire :

$$2C = -\int_0^1 \log \frac{\sin \pi\xi}{\pi}\, d\xi;$$

on va voir que cette intégrale s'obtient très facilement

Soit en effet $f(\xi) = \frac{\sin \pi\xi}{\pi}$, nous poserons d'abord :

$$\int_0^1 f(\xi)\, d\xi = \int_0^{\frac{1}{2}} f(\xi)\, d\xi + \int_{\frac{1}{2}}^1 f(\xi)\, d\xi,$$

et en changeant ξ en $1-\xi$ dans $\int_{\frac{1}{2}}^1 f(\xi)\, d\xi$:

$$\int_0^1 f(\xi)\, d\xi = \int_0^{\frac{1}{2}} f(\xi)\, d\xi + \int_0^{\frac{1}{2}} f(1-\xi)\, d\xi.$$

Mais nous avons $f(\xi) = f(1-\xi)$, cette égalité devient donc :

$$\int_0^1 f(\xi)\, d\xi = 2\int_0^{\frac{1}{2}} f(\xi)\, d\xi.$$

et si l'on change ξ en $\frac{\xi}{2}$,

$$\int_0^1 f'(\xi)\,d\xi = \int_0^1 f'\left(\frac{\xi}{2}\right)d\xi\,.$$

Il suffit maintenant d'employer la relation qui se vérifie immédiatement

$$f'(\xi) = f'\left(\frac{\xi}{2}\right) + f'\left(\frac{1-\xi}{2}\right) + \log 2\pi,$$

et d'intégrer par rapport à ξ entre les limites 0 et l'unité, pour en conclure :

$$\int_0^1 f'(\xi)\,d\xi = 2\int_0^1 f'(\xi)\,d\xi + \log 2\pi$$

ce qui donne :

$$\int_0^1 f'(\xi)\,d\xi = -\log 2\pi$$

et par conséquent :

$$C = \frac{1}{2}\log 2\pi$$

C'est en me fondant sur l'intégrale de Raabe que je me propose d'obtenir l'expression de $\log\Gamma(a)$ lorsque a est un grand nombre, question importante et difficile dont la solution rigoureuse a été donnée pour la première fois par Cauchy.

J'emploierai dans ce but une expression de cette intégrale à laquelle conduit la formule

$$\log\Gamma(\xi) = \int_{-\infty}^{0}\left[\frac{e^{\xi x} - e^{x}}{e^{x}-1} - (\xi-1)e^{x}\right]\frac{dx}{x},$$

Elle se trouve au moyen des égalités :

$$\int_a^{a+1} e^{\xi x}\,d\xi = \frac{e^{ax}(e^{x}-1)}{x}$$

$$\int_a^{a+1}(\xi-1)\,\xi = a - \frac{1}{2}\,.$$

et un calcul facile donne immédiatement ;

$$J = \int_{-\infty}^{0}\left[\frac{e^{ax}}{x} - \frac{e^{x}}{e^{x}-1} - \left(a-\frac{1}{2}\right)e^{x}\right]\frac{dx}{x}\,.$$

Retranchons maintenant de $\log\Gamma(a)$, on aura ainsi

$$\log\Gamma(a) - J = \int_{-\infty}^{0}\left[\frac{e^{ax}}{e^{x}-1} - \frac{e^{ax}}{x} + \frac{e^{x}}{2}\right]\frac{dx}{x},$$

et en ajoutant membre à membre avec l'équation suivante

$$\frac{1}{2}\log a = \int_{-\infty}^{0}\frac{e^{ax} - e^{x}}{2x}\,dx,$$

nous serons conduit à la relation :

$$\log\Gamma(a) = J - \frac{1}{2}\log a + \int_{-\infty}^{0}\left[\frac{1}{e^{x}-1} - \frac{1}{x} + \frac{1}{2}\right]e^{ax}\frac{dx}{x}$$

Posons enfin pour abréger :

$$\varphi(x) = \left(\frac{1}{e^{x}-1} - \frac{1}{x} + \frac{1}{2}\right)\frac{1}{x}\,,$$

remplaçons encore J par sa valeur, $a\log a - a + \frac{1}{2}\log 2\pi$, le résultat que nous

venons d'obtenir prend cette nouvelle forme :

$$\log \Gamma(a) = \left(a - \frac{1}{2}\right) \log a - a + \frac{1}{2} \log 2\pi + \int_{-\infty}^{0} \varphi(x) e^{ax} dx ;$$

Nous allons en faire l'étude approfondie.

J'établirai en premier lieu qu'il donne la valeur asymptotique de $\log \Gamma(a)$ en démontrant que $\varphi(x)$ a pour maximum $\frac{1}{12}$, de sorte qu'on obtient en désignant par θ un nombre inférieur à l'unité :

$$\int_{-\infty}^{0} \varphi(x) e^{ax} dx = \frac{\theta}{12} \int_{-\infty}^{0} e^{ax} dx$$

$$= \frac{\theta}{12 a}$$

Je remarque pour cela qu'on peut écrire

$$\varphi(x) = \frac{e^{x}(x-2) + x + 2}{2x^2 (e^{x} - 1)}$$

puis en changeant x en $2x$:

$$\varphi(2x) = \frac{(e^{x} + e^{-x})x - (e^{x} - e^{-x})}{4x^2 (e^{x} - e^{-x})}$$

En développant en série on trouve aisément après avoir supprimé le facteur commun $2x^3$:

$$\varphi(2x) = \frac{1}{4} \frac{\sum \frac{(2n+2)x^{2n}}{\Gamma(2n+4)}}{\sum \frac{x^{2n}}{\Gamma(2n+2)}} \qquad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

$$= \frac{1}{4} \frac{\frac{2}{2.3} + \frac{4x^2}{2.3.4.5} + \dots}{1 + \frac{x^2}{2.3} + \dots}$$

Il est évident que le coefficient de x^{2n} est moindre au numérateur qu'au dénominateur, le maximum de la fonction s'obtient par suite en faisant $x = 0$, et a pour valeur $\frac{1}{12}$ comme nous l'avons annoncé.

Nous arrivons maintenant à l'importante question de l'élévation approchée de l'intégrale définie $\int_{-\infty}^{0} \varphi(x) e^{ax} dx$ que je désignerai afin d'abréger par $J(a)$. Une première méthode, consiste à développer en Série la fonction $\varphi(x)$, au moyen de l'identité

$$\frac{1}{1 - e^{x}} = 1 + e^{x} + \dots + e^{(n-1)x} + \frac{e^{nx}}{1 - e^{x}}$$

Soit alors :

$$J_m = \int_{-\infty}^{0} \frac{[e^{x}(2-x) - 2 - x] e^{mx}}{2x^2} dx$$

nous aurons ainsi :

$$J(a) = J_0 + J_1 + \dots + J_{n-1} + J(a+n).$$

En remarquant ensuite cette indentité :

$$\frac{e^{(m+1)x}(2-x) - e^{mx}(2+x)}{2x^2} = \left(m + \frac{1}{2}\right) \frac{e^{(m+1)x} - e^{mx}}{x}$$

$$- D_x \left[\frac{e^{(m+1)x} - e^{mx}}{} \right]$$

nous obtenons immédiatement :

$$J_m = \left(m+\frac{1}{2}\right)\log\left(1+\frac{1}{m}\right)-1;$$

et la formule que nous venons de démontrer

$$J(a+n)=\frac{\theta}{12(a+n)}$$

montre que pour n infini le terme complémentaire est nul. Nous trouvons donc en série convergente l'expression :

$$J(a) = \Sigma\left[\left(m+\frac{1}{2}\right)\log\left(1+\frac{1}{m}\right)-1\right]$$
$$(m = 0, 1, 2, \ldots\ldots)$$

qui a été donnée pour la première fois par Gudermann. Ce beau résultat est peu utile pour l'objet que nous avons en vue, on voit en effet par la valeur du reste $J(a+n)$ combien est lente la convergence de la série...

La méthode qui conduira à la forme définitive de la quantité $J(a)$ repose sur une transformation de cette intégrale qu'on obtient au moyen de l'expression suivante de la fonction $\varphi(x)$.

Je partirai pour l'obtenir de la relation,

$$\operatorname{Cot} x = \frac{1}{x} + \Sigma\frac{2x}{x^2-m^2\pi^2}$$
$$(m = 1, 2, 3, \ldots\ldots)$$

et en remarquant que l'on a :

$$\operatorname{Cot} x = i\,\frac{e^{2ix}+1}{e^{2ix}-1},$$

j'en déduirai par le changement de x en $\frac{x}{2i}$,

$$\frac{e^x+1}{e^x-1} = \frac{2}{x} + \Sigma\frac{4x}{x^2+4m^2\pi^2},$$

ce qui donne d'abord

$$\frac{e^x(x-2)+x+2}{x(e^x-1)} = \Sigma\frac{4x}{x^2+4m^2\pi^2}$$

et par conséquent ;

$$\varphi(x) = \Sigma\frac{2}{x^2+4m^2\pi^2}$$

Cela étant nous pouvons écrire au moyen de cette expression :

$$J(a) = \Sigma\int_{-\infty}^{0}\frac{2\,e^{ax}dx}{x^2+4m^2\pi^2};$$

changeons maintenant de variable dans l'intégrale définie et faisant, $x=\frac{2m\pi\xi}{a}$; on aura :

$$J(a) = \Sigma\int_{-\infty}^{0}\frac{a\,e^{2m\pi\xi}d\xi}{m\pi(\xi^2+a^2)}$$

ou bien :

$$J(a) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{0}\frac{a\,d\xi}{\xi^2+a^2}\left(\frac{e^{2\pi\xi}}{1}+\frac{e^{4\pi\xi}}{2}\cdots\frac{e^{6\pi\xi}}{3}+\cdots\right)$$

Mais on reconnait dans la série qui figure sous le signe d'intégration le développement de $\log(1-e^{2\pi\xi})$ changé de signe on a donc cette

nouvelle expression :

$$J(a) = -\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{0} \frac{a \log(1-e^{2\pi\xi})}{\xi^2+a^2} d\xi$$

et en intervertissant les limites :

$$J(a) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{-\infty} \frac{a \log(1-e^{2\pi\xi})}{\xi^2+a^2} d\xi$$

On remarquera que la quantité a n'entre plus en exponentielle, sous forme transcendante, mais dans la fraction rationnelle fort simple $\frac{a}{\xi^2+a^2}$. Cela étant, on tire de l'identité élémentaire ;

$$\frac{a}{\xi^2+a^2} = \frac{1}{a} - \frac{\xi^2}{a^3} + \dots + \frac{(-1)^{n-1}\xi^{2n-2}}{a^{2n-1}} + \frac{(-1)^n \xi^{2n}}{a^{2n-1}(\xi^2+a^2)}$$

ce développement qui procède suivant les puissances descendantes de a :

$$J(a) = \frac{1}{\pi a}\int_0^{-\infty} \log(1-e^{2\pi\xi}) d\xi - \frac{1}{\pi a^3}\int_0^{-\infty} \xi^{2n} \log(1-e^{2\pi\xi}) d\xi +$$

$$+ \frac{(-1)^{n-1}}{\pi a^{2n-1}}\int_0^{-\infty} \xi^{2n-2} \log(1-e^{2\pi\xi}) d\xi + \frac{(-1)^n}{\pi a^{2n-1}}\int_0^{-\infty} \frac{\xi^{2n}\log(1-e^{2\pi\xi})}{\xi^2+a^2} d\xi$$

Les intégrales définies qui y figurent nous sont connues ; on a obtenu en effet (page 107) cette formule où B_n est le n^e nombre de Bernouilli.

$$\int_0^{\infty} x^{2n-2} \log \frac{1}{1-e^{-x}} dx = \frac{B_n (2\pi)^{2n}}{4n(2n-1)}$$

et il suffit de poser $x = -2\pi\xi$, pour en conclure :

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{-\infty} \xi^{2n-2} \log(1-e^{2\pi\xi}) d\xi = \frac{B_n}{2n(2n-1)}$$

C'est ce qui nous donne le résultat important contenu dans l'égalité suivante :

$$J(a) = \frac{B_1}{2a} - \frac{B_2}{3.4a^3} + \frac{B_3}{5.6a^5} - \dots + \frac{(-1)^{n-1}B_n}{2n(2n-1)a^{2n-1}}$$
$$+ (-1)^n R_n,$$

où j'ai posé,

$$R_n = \frac{1}{\pi a^{2n-1}}\int_0^{-\infty} \frac{\xi^{2n}\log(1-e^{2\pi\xi})}{\xi^2+a^2} d\xi.$$

On voit maintenant qu'il est facile de trouver une limite supérieure du terme complémentaire R_n, en remplaçant $\frac{\xi^{2n}\log(1-e^{2\pi\xi})}{\xi^2+a^2}$ par la quantité plus grande $\frac{\xi^{2n}\log(1-e^{2\pi\xi})}{a^2}$. Nous aurons ainsi l'intégrale $\frac{1}{\pi a^{2n+1}}\int \xi^{2n}\log(1-e^{2\pi\xi}) d\xi$, c'est-à-dire le terme de la série qui suit celui auquel on s'est arrêté, de sorte qu'on peut écrire,

$$R_n = \frac{\theta B_{n+1}}{(2n+2)(2n+1)},$$

en désignant par θ un nombre positif moindre que l'unité. A quel point est nécessaire la considération de ce reste et quel rôle essentiel il joue

dans l'emploi du développement en Série de $J(a)$, c'est ce que nous devons maintenant montrer.

Je remarque à cet effet que les termes commencent par décroître, comme le montrent les valeurs des premiers nombres de Bernouilli, $B_1 = \frac{1}{6}$, $B_2 = \frac{1}{30}$, $B_3 = \frac{1}{42}$, etc. dans la suite que nous étudions, qu'on nomme Série de Stirling. Mais de l'expression générale donnée précédemment (p.107)

$$\frac{B_m (2\pi)^{2m}}{\Gamma(2m+1)} = 2\left(1+\frac{1}{2^{2n}}+\frac{1}{3^{2n}}+\cdots\right)$$

on tire :

$$B_m = \frac{2\Gamma(2m+1)}{(2\pi)^{2m}}\left(1+\frac{1}{2^{2m}}+\frac{1}{3^{2m}}+\cdots\right)$$

et par suite.

$$\frac{B_m}{2m(2m-1)} = \frac{2a\Gamma(2m-1)}{(2\pi a)^{2m}}\left(1+\frac{1}{2^{2m}}+\frac{1}{3^{2m}}+\cdots\right)$$

On voit par cette formule qu'après avoir été en diminuant ces termes finissent par augmenter quelle que soit la valeur de a, au delà de toute limite de sorte que la série est certainement divergente. Mais on reconnait en même temps qu'il est possible d'employer cette série divergente, et qu'on en tirera la plus grande approximation qu'elle soit susceptible de donner en déterminant le rang n du terme minimum, de sorte que le reste $R_n = \frac{\theta B_{n+1}}{(2n+2)(2n+1)}$ soit le plus petit possible. Une solution de cette question suffisante pour la pratique a été donnée par Legendre dans les exercices de Calcul intégral p. 292. L'illustre géomètre observe que le rapport des deux quantités $\frac{B_n}{2n(2n-1)}$, $\frac{B_{n+1}}{(2n+2)(2n+1)}$, étant à fort peu près $\frac{2n(2n-1)}{(2\pi a)^2}$, les termes de la Série diminuent lorsque, $\frac{2n(2n-1)}{(2\pi a)^2} < 1$, pour croître ensuite, quand on a $\frac{2n(2n-1)}{(2\pi a)^2} > 1$. En posant $2n(2n-1) = (2\pi a)^2$ ce qui donne sensiblement $n = \pi a$ on obtient par conséquent le rang du plus petit terme ; j'ajoute que de la formule $\frac{2a\Gamma(2n-1)}{(2\pi a)^{2n}}$ on conclut facilement la valeur de ce terme. Multiplions haut et bas par $2n-1$ nous aurons d'abord : $\frac{2a\Gamma(2n)}{(2n-1)(2\pi a)^{2n}}$; remplaçant ensuite $2\pi a$ par $2n$, au dénominateur on trouve au moyen de l'expression asymptotique de $\Gamma(2n)$,

$$\frac{\Gamma(2n)}{(2n)^{2n}} = \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{2n}\, e^{2n}}.$$

Le terme minimum est donc en simplifiant $\frac{2\sqrt{a}}{(2a\pi-1)e^{2a\pi}}$, et l'on reconnait ainsi qu'il diminue avec une grande rapidité lorsque a augmente.

La détermination de l'indice du terme minimum pour une valeur donnée de a, a fait depuis Legendre, le sujet des recherches de Mr Genocchi (x) et de Mr Limbourg (xx) ; je donnerai dans ce qui suit une idée de l'analyse ingénieuse

(x) Intorno alla funzione $\Gamma(x)$ e alla Serie dello Stirling, che ne exprima il logarithmo (Memoires de la Société Italienne des Sciences T. VI)

(xx) Sur les intégrales Eulériennes (Memoires couronnés par l'Académie Royale de Belgique T. XXX).

de Mr Limbourg.

Soit d'abord en changeant ξ en $a\xi$:

$$R_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{\xi^{-2k}\log(1-e^{2a\pi\xi})\,d\xi}{1+\xi^2}$$

Nous n'emploierons pas, pour déterminer le minimum, l'équation transcendante $D_k R_k = 0$ en considérant k comme une variable continue. Nous envisagerons avec Mr Limbourg la différence $R_{k-1}\,R_k$; que je représenterai par $f(k)$ en posant.

$$f(k) = \frac{1}{\pi}\int_0^{-\infty} \frac{\xi^{2k-2}(1-\xi^2)\log(1-e^{2a\pi\xi})}{1+\xi^2}\,d\xi ;$$

on verra, en effet, qu' l'équation $f(k)=0$ plus facilement abordable que la précédente, conduit au résultat cherché.

En premier lieu, je remarque qu'ayant :

$$f'(k) = \frac{1}{\pi}\int_0^{-\infty} \frac{\xi^{2k-2}(1-\xi^2)\log\xi^2\log(1-e^{2a\pi\xi})}{1+\xi^2}\,d\xi ,$$

la quantité placée sous le signe d'intégration est négative, d'où résulte que $f(k)$ est une fonction continuellement décroissante, lorsque la variable augmente.

Effectivement, dans l'intervalle compris entre zéro et l'unité, des deux facteurs $1-\xi^2$ et $\log\xi^2$, le premier est positif et le second négatif, et c'est l'inverse qui a lieu pour toutes les valeurs de ξ, supérieures à l'unité.

L'équation $f(k)=0$ ne peut donc admettre qu'une racine ; nous allons voir qu'elle existe, et nous en déterminerons une valeur approchée.

Partant à cet effet des identités suivantes :

$$\frac{1-\xi^2}{1+\xi^2} = 1-\xi+\frac{\xi(1-\xi)^2}{1+\xi^2},$$

$$\frac{\xi(1-\xi^2)}{1+\xi^2} = 1-\xi-\frac{(1-\xi)^2}{1+\xi^2},$$

dont l'une se déduit de l'autre par le changement de ξ en $\frac{1}{\xi}$, je multiplie la première par : $\xi^{2k-2}\log(1-e^{-2a\pi\xi})\,d\xi$, la seconde par $\xi^{2k-3}\log(1-e^{-2a\pi\xi})d\xi$, nous en tirons les relations :

$$\pi f(k) = \int_0^{-\infty} \xi^{2k-2}(1-\xi)\log(1-e^{2a\pi\xi})\,d\xi + J_1$$

$$\pi f(k) = \int_0^{-\infty} \xi^{2k-3}(1-\xi)\log(1-e^{2a\pi\xi})\,d\xi - J_2$$

J'ai posé pour abréger dans les seconds membres :

$$J_1 = \int_0^{-\infty} \frac{\xi^{2k-1}(1-\xi)^2\log(1-e^{2a\pi\xi})}{1+\xi^2}\,d\xi ,$$

$$J_2 = \int_0^{-\infty} \frac{\xi^{2k-3}(1-\xi)^2\log(1-2^{2a\pi\xi})\,d\xi}{1+\xi^2} ;$$

on remarquera que ces deux intégrales sont deux quantités positives. Cela étant j'emploie comme auxiliaires les équations :

$$\int_0^{\infty} \xi^{2k-2}(1-\xi)\log(1-e^{-2a\pi\xi})\,d\xi = 0,$$

$$\int_0^{\infty} \xi^{2k-3}(1-\xi)\log(1-e^{-2a\pi\xi})\,d\xi = 0,$$

qu'il est aisé d'obtenir sous une forme complètement explicite et qui n'ont l'une et l'autre qu'une seule racine, comme la proposée. Nous avons, en effet, en opérant comme on l'a fait précédemment :

$$\int_0^{\infty} \xi^{\mu-1}\log(1-e^{-2a\pi\xi})\,d\xi = \frac{\Gamma(\mu)}{2a\pi^{\mu}}\,S_{\mu+1},$$

où j'ai posé pour abréger
$$S_\mu = 1+\frac{1}{2^\mu}+\frac{1}{3^\mu}+\cdots\cdots$$

ce qui donne immédiatement

$$\frac{\Gamma(2k-1)\,S_{2k}}{(2a\pi)^{2k-1}} - \frac{\Gamma(2k)\,S_{2k+1}}{(2a\pi)^{2k}} = 0$$

$$\frac{\Gamma(2k-2)\,S_{2k-1}}{(2a\pi)^{2k-2}} - \frac{\Gamma(2k-1)\,S_{2k}}{(2a\pi)^{2k-1}} = 0$$

et en simplifiant :

$$2a\pi\,S_{2k} - (2k-1)\,S_{2k+1} = 0$$

$$2a\pi\,S_{2k-1} - (2k-2)\,S_{2k} = 0$$

Considérons maintenant, pour fixer les idées, la première équation que j'écris ainsi :
$$\frac{2k-1}{2a\pi} = \frac{S_{2k}}{S_{2k+1}};$$

les sommes S_μ décroissant lorsque l'indice augmente, on a : $\frac{2k-1}{2a\pi} > 1$ et par conséquent : $k > a\pi + \frac{1}{2}$.

D'autre part, en observant que S_{2k+1} est supérieur à l'unité, nous pouvons poser $\frac{2k-1}{2a\pi} < S_{2k}$, c'est-à-dire :

$$\frac{2k-1}{2a\pi} < 1+\frac{1}{2^{2k}}+\frac{1}{3^{2k}}+$$

Je remplace dans le second membre l'exposant $2k$, par la quantité moindre $2a\pi+1$, on aura à fortiori
$$\frac{2k-1}{2a\pi} < 1+\frac{1}{2^{2a\pi+1}}+\frac{1}{3^{2a\pi+1}}+\cdots$$

et nous en concluons :

$$K < a\pi+\frac{1}{2}+\frac{a\pi}{2^{2a\pi+1}}+\frac{a\pi}{3^{2a\pi+1}}+\cdots\cdots$$

Nous désignerons par K_1 la racine dont on a ainsi la valeur approchée ; on trouvera, en traitant par le même procédé la seconde équation, qu'elle admet une racine K_2, l'unité par les conditions suivantes :

$$K_2 > a\pi+1,$$

$$K_2 < a\pi+1+\frac{a\pi}{2^{2a\pi+1}}+\frac{a\pi}{3^{2a\pi+1}}+\cdots\cdots$$

Ceci posé, les relations données plus haut et que je rappelle :

$$\pi f(k) = \int_0^{-\infty} \xi^{2k-2}(1-\xi)\log(1-e^{-2a\pi\xi})\,d\xi + J_1,$$

$$\pi f(k) = \int_0^{-\infty} \xi^{2k-3}(1-\xi)\log(1-e^{-2a\pi\xi})\,d\xi - J_2,$$

montrent qu'en faisant $k=k_1$ puis $k=k_2$ la fonction $f(k)$ est successivement positive et négative, d'où résulte que l'équation proposée $f(k)=0$ a sa racine unique comprise entre K_1 et K_2. Nous pouvons donc écrire, en la représentant par K_0:

$$K_1 < K_0 < K_2$$

et à plus forte raison :

$$a\pi + \frac{1}{2} < K_0 < a\pi + 1 + \frac{a\pi}{2^{2a\pi+1}} + \frac{a\pi}{3^{2a\pi+1}} + \cdots$$

Sans chercher une plus grande approximation pour la racine K_0, afin d'éviter de trop longs calculs, j'arrive à la conclusion qu'a obtenue M. Limbourg.

Revenons pour cela à la relation :

$$R_{k-1} - R_k = f(k)$$

et faisons croître la variable k jusqu'à l'entier le plus voisin de la racine K_0, que je désigne par n. Le second membre étant alors positif, les restes vont en diminuant et l'on a :

$$R_{n-1} > R_n;$$

mais en franchissant cette racine, le second membre passe du positif au négatif, les restes successifs croissent et nous obtenons :

$$R_n < R_{n+1}.$$

Il est ainsi prouvé que R_n est le reste minimum ; on tire donc de la série l'approximation la plus grande qu'elle puisse donner en faisant la somme de ses n premiers termes. Dans le cas enfin de K_0 entier, il y aurait deux restes égaux et moindres que tous les autres, il serait indifférent de prendre n termes ou $n-1$ termes.

M. Bourguet, dans sa thèse sur le développement en série des intégrales Eulériennes, a donné sans démonstration la formule : $K_0 = a\pi + \frac{3}{4} - \frac{3}{32a\pi}$, en négligeant les termes de degré supérieur par rapport à $\frac{1}{a\pi}$; p. 197.

15me Leçon

Nous allons reprendre dans cette leçon sous un nouveau point de vue l'étude de l'intégrale Eulérienne, nous allons montrer que la quantité qui a été considérée jusqu'ici en n'employant que les valeurs réelles et positives de

la variable est une fonction analytique uniforme dans toute l'étendue du plan. Voici dans ce but, une méthode simple et facile qui a été donnée par Mr. Prym, professeur à l'Université de Würzbourg, dans le Journal de Borchardt T. LXXXIII.

Avant l'éminent professeur de Würzbourg, Mr. de Gasparis, directeur de l'observatoire de Naples avait eu l'idée, pour calculer l'intégrale $\int_0^\infty x^{a-1}e^{-x}dx$, de la partager en deux parties. $\int_0^1 x^{a-1}e^{-x}dx$ et $\int_1^\infty x^{a-1}e^{-x}dx$. (Sul calcolo del valore della funzione $\Sigma\frac{1}{\Gamma(x)}$. Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences de Naples, Septembre 1867), et il en avait déduit plusieurs des propriétés obtenues plus tard par Mr Prym. Cependant les conséquences de cette décomposition au point de vue de la conception de l'intégrale Eulérienne comme une fonction analytique, lui avaient échappé. Elles supposent, en effet, des notions moins connues alors qu'aujourd'hui sur la théorie générale des fonctions.

Désignons par ω une constante positive quelconque et soit :

$$P(a) = \int_0^\omega e^{-x}x^{a-1}dx,$$

$$Q(a) = \int_\omega^\infty e^{-x}x^{a-1}dx,$$

de sorte que l'on ait :

$$\Gamma(a) = P(a) + Q(a).$$

On remarquera que la seconde intégrale n'étant plus prise à partir de la limite $x=0$, est finie si, l'on pose $a = \alpha + i\beta$, pour toutes les valeurs de α et β. Nous pouvons écrire en effet :

$$\int_\omega^\infty e^{-x}x^{\alpha-1+i\beta}dx = \int_\omega^\infty e^{-x}x^{\alpha-1}\cos\log(x^\beta)\,dx + i\int_\omega^\infty e^{-x}x^{\alpha-1}\sin\log(x^\beta)\,dx.$$

le logarithme de la quantité positive x^β étant pris dans le sens arithmétique, cette seconde intégrale représente donc une fonction holomorphe dans tout le plan : Ceci posé je remplace dans la première e^{-x} par son développement, $1 - \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} \dots$; on en conclut l'expression suivante :

$$\Gamma(a) = \frac{\omega^a}{a} - \frac{\omega^{a+1}}{a+1} + \frac{\omega^{a+2}}{1.2(a+2)} - \frac{\omega^{a+3}}{1.2.3(a+3)} + \dots$$

$$= \omega^a\left[\frac{1}{a} - \frac{a}{a+1} + \frac{\omega^2}{1.2(a+2)} - \frac{\omega^3}{1.2.3(a+3)} + \dots\right]$$

Or cette série tirée de l'intégrale $\int^\omega e^{-x}x^{a-1}dx$, où il est nécessaire de supposer la quantité a ou sa partie réelle positive et différente de zéro, est convergente et même rapidement convergente pour toute valeur réelle ou imaginaire de a. Elle définit par conséquent une fonction uniforme, cela étant la relation :

$$\Gamma(a) = P(a) + Q(a)$$

nous donne l'expression générale de la fonction Eulérienne obtenue pour la première

fois par Mr. Prym. On remarquera que $P(a)$ représente la partie fractionnaire ou méromorphe de $\Gamma(a)$, et met en évidence les pôles $a = 0, -1, -2, \ldots$ On voit de plus que les numérateurs des fractions partielles se réduisent à des constantes, et donnent pour les résidus les valeurs déterminées par Mr. Prym, si l'on fait en particulier $\omega = 1$. (Dans cette hypothèse, la partie méromorphe et la partie entière de $\Gamma(a)$ deviennent:

$$P(a) = \frac{1}{a} - \frac{1}{a+1} + \frac{1}{1.2(a+2)} - \cdots + \frac{(-1)^n}{1.2\ldots n(a+n)} + \cdots$$

et

$$Q(a) = \int_1^\infty x^{a-1} e^{-x} dx.$$

J'ajoute que l'on a aussi:

$$e P(a) = \frac{1}{a} + \frac{1}{a(a+1)} + \cdots + \frac{1}{a(a+1)(a+2)\ldots(a+n)} + \cdots;$$

Mr. Pincherle démontre cette formule avec autant de simplicité que d'élégance, en partant de la série:

$$e^{1-x} = \Sigma \frac{(1-x)^n}{1.2\ldots n},$$

On en tire en effet:

$$\int_0^1 e^{1-x} x^{a-1} dx = \Sigma \int_0^1 \frac{x^{a-1}(1-x)^n dx}{1.2\ldots n}$$

et l'expression de l'intégrale Eulérienne de première espèce qui a été établie (p. 126)

$$\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^n dx = \frac{1.2\ldots n}{a(a+1)\ldots(a+n)}$$

donne immédiatement le résultat annoncé.[1]

Nous venons ainsi de passer d'une expression donnée par une intégrale définie dans une portion du plan, à une fonction analytique uniforme, et le théorème de Riemann nous assure que cette extension n'est possible que d'une seule manière.

Maintenant nous allons retrouver les propriétés principales de la fonction Eulérienne, en prenant, comme point de départ une représentation analytique de $\Gamma(a)$ donnée par Gauss et dont elles se déduisent de la manière la plus facile[2].

Reprenons à cet effet la formule:

$$\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^n dx = \frac{1.2.\ldots n}{a(a+1)(a+2)\ldots\ldots(a+n)}.$$

Remplaçons ensuite dans l'intégrale x par $\frac{x}{n}$; cette égalité devient:

$$\int_0^n x^{a-1}\left(1 - \frac{x}{n}\right)^n dx = \frac{n^a}{a\left(1+\frac{a}{1}\right)\left(1+\frac{a}{2}\right)\ldots\left(1+\frac{a}{n}\right)};$$

---

[1] Rendiconti del circolo matematico di Palerma, 1888, p. 225.

[2] Cette représentation avait été obtenue bien antérieurement par Euler, dans un mémoire resté peu connu, et qui n'est point venu sous les yeux de Gauss.

on en conclu en faisant croître n indéfiniment :

$$\Gamma(a)=\int_0^\infty x^{a-1}e^{-x}dx=\lim\left[\frac{n^a}{a(1+\frac{a}{1})(1+\frac{a}{2})\ldots(1+\frac{a}{n})}\right]_{n=\infty}.$$

C'est là l'expression que j'ai eu pour but d'obtenir ; mais on y parvient par une méthode plus rigoureuse, qui évite l'emploi d'une intégrale dont la limite supérieure devient infinie, comme je vais le montrer.

Pour cela je partirai de l'intégrale :

$$\int_0^1 x^{n-1}(1-x)^{a-1}dx=\frac{1.2,\ldots n-1}{a(a+1)(a+2)\ldots(a+n-1)},$$

et je ferai $x^n=z$. On obtient par ce changement de variable :

$$\frac{1}{n}\int_0^1(1-\sqrt[n]{z})^{a-1}dz=\frac{1.2,\ldots\ldots n-1}{a(a+1)(a+2)\ldots(a+n-1)},$$

et par conséquent :

$$\int_0^1\left[n(1-\sqrt[n]{z}\right]^{a-1}dz=\frac{n^a\,1,2,\ldots\ldots n-1}{a(a+1)(a+2)\ldots\ldots(a+n-1)},$$

ou bien encore :

$$\int_0^1\left[n(1-\sqrt[n]{z})\right]^{a-1}dz=\frac{n^a}{a(1+\frac{a}{1})(1+\frac{a}{2})\ldots\ldots(1+\frac{a}{n-1})}.$$

Maintenant la supposition de n infiniment grand, ne souffre plus de difficulté ; on a alors, en effet, $n(1-\sqrt[n]{z})=-\log z=\log\frac{1}{z}$, et l'intégrale devient $\int_0^1(\log\frac{1}{z})^{a-1}dz$, il suffit de faire $z=e^{-x}$ pour le ramener à $\Gamma(a)$.

Après avoir ainsi obtenu l'expression :

$$\Gamma(a)=\lim\left[\frac{n^a}{a(a+\frac{a}{1})(1+\frac{a}{2})\ldots\ldots(1+\frac{a}{n})}\right],$$

dans laquelle a été introduit pour plus de symétrie le facteur $1+\frac{a}{n}$, dont la limite est l'unité, j'en déduis cette première et importante conséquence qu'elle définit $\Gamma(a)$ comme une fonction uniforme, dans tout le plan. Je considère à cet effet la relation :

$$\log\Gamma(a)=\lim\left[a\log n-\log a-\log(1+\tfrac{a}{1})-\ldots\ldots\log(1+\tfrac{a}{n})\right]$$

et je conviens que a étant réel ou imaginaire, on s'affranchit de l'indétermination relative aux valeurs multiples des logarithmes, en adoptant celle de ces valeurs qui s'évanouit lorsqu'on suppose $a=0$.

Cela étant, remplaçons avec Gauss $\log n$ par la somme :

$$\log\frac{2}{1}+\log\frac{3}{2}+\log\frac{4}{3}+\ldots+\log\frac{n}{n-1};$$

nous pourrons alors écrire :

$$\begin{aligned}\log a\,\Gamma(a)=&\left[a\log\tfrac{2}{1}-\log(1+\tfrac{a}{1})\right],\\&+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\&+\left[a\log(1+\tfrac{1}{n})-\log(1+\tfrac{a}{n})\right],\\&+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}$$

ou, pour abréger

$$\log a\,\Gamma(a) = \Sigma\left[a \log\left(1+\frac{1}{n}\right) - \log\left(1+\frac{a}{n}\right)\right].$$
$$(n = 1, 2, 3, \ldots\ldots).$$

Nous allons montrer que cette série est convergente pour toute valeur réelle ou imaginaire de a.

Soit en effet :

$$f(x) = a \log(1+x) - \log(1+ax),$$

$$f'(x) = \frac{x(a^2-a)}{(1+x)(1+ax)}$$

En développant $f(x)$ par la formule de Maclaurin, et observant que pour a imaginaire, nous sommes convenus de prendre celle des dénominations du logarithme qui s'annule avec a, on aura $f(0)=0$ et par suite :

$$f(x) = x\int_0^1 f'(tx)\,dt,$$

$$= x^2\int_0^1 \frac{(a^2-a)\,dt}{(1+tx)(1+atx)}.$$

Employons maintenant la formule de M. Darboux ; en désignant par θ une valeur de t comprise entre zéro et l'unité, nous aurons :

$$f(x) = x^2\frac{\lambda(a^2-a)}{(1+\theta x)(1+a\theta x)}.$$

Remplaçons ensuite x par $\frac{1}{n}$, nous trouvons pour le terme général :

$$\frac{\lambda(a^2-a)}{(n+\theta)(n+\theta a)}$$

les quantités λ et θ étant variable avec n. On obtient une limite supérieure du module de cette quantité, si l'on remarque qu'en vertu de l'inégalité :

$$\operatorname{Mod}(A+B) > \operatorname{Mod} A - \operatorname{Mod} B$$

$$\operatorname{Mod}(n+\theta a) > n - \theta \operatorname{Mod} a$$

et à plus forte raison :

$$\operatorname{Mod}(n+\theta a) > n - \operatorname{Mod} a.$$

La limite est donc, à partir des valeurs de n supérieurs à $\operatorname{Mod} a$, l'expression :

$$\frac{\operatorname{Mod}(a^3-a)}{n^2 - n \operatorname{Mod} a}$$

qui est le terme général d'une série convergente.

Si l'on suppose que a soit une quantité imaginaire sans partie réelle et par conséquent de la forme ia, la définition de Gauss donne une conséquence remarquable dont je dois la communication à M. Stieltjes.

Soit alors :

$$\Gamma(ia) = R(\cos\Theta + i\sin\Theta),$$

nous aurons :

$$R = \sqrt{\frac{2\pi}{a(e^{a\pi}-e^{-a\pi})}}$$

L'angle Θ s'obtient ensuite par la formule :

$$\Theta = \lim \left[a \log n \mp \frac{\pi}{2} \operatorname{arctg} a - \operatorname{arctg} \frac{a}{2} \cdots - \operatorname{arctg} \frac{a}{n}\right],$$

où l'on doit prendre le signe supérieur ou inférieur suivant que a est positif ou négatif, tous les arc tg étant compris entre les limites $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$.

J'arrive maintenant aux propriétés fondamentales de la fonction $\Gamma(a)$ que nous allons établir comme conséquences de la formule :

$$\log \Gamma(a) = \lim \left[a \log n - \log a - \log\left(1+\frac{a}{1}\right) - \cdots - \log\left(1+\frac{a}{n}\right)\right].$$

Prenant la dérivée des deux membres de cette égalité par rapport à a, il vient ;

$$D_a \log \Gamma(a) = \lim \left[\log n - \frac{1}{a} - \frac{1}{a+1} - \cdots - \frac{1}{a+n}\right];$$

$D_a \log \Gamma(a)$ est donc encore comme $\log \Gamma(a)$ la différence finie de deux quantités qui augmentent indéfiniment.

Mais en dérivant une fois de plus, il vient :

$$D_a^2 \log \Gamma(a) = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{(a+1)^2} + \cdots + \frac{1}{(a+n)^2} + \cdots$$

égalité dans laquelle la série du second membre est toujours convergente, quelle que soit la valeur réelle ou imaginaire de a. Ce résultat important aurait pu faire découvrir la véritable nature de $\Gamma(a)$ comme fonction uniforme de la variable. Nous montrerons en effet qu'on peut en conclure toutes ses propriétés et en premier lieu que la transcendante $\frac{1}{\Gamma(a)}$ est holomorphe dans tout le plan, proposition qui a fait le sujet d'un des premiers travaux de M. Weierstrass (Journal de Crelle, Tome LI).

Reprenons dans ce but l'équation :

$$D_a^2 \log \Gamma(a) = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{(a+1)^2} + \cdots + \frac{1}{(a+n)^2} + \cdots$$

Multiplions les deux membres par da, et intégrons entre les limites 1 et a, on aura :

$$D_a \log \Gamma(a) = -C + \left(1 - \frac{1}{a}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{a+1}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{a+n}\right) + \cdots$$

et la série qui figure dans le second membre ayant pour terme général :

$$\frac{1}{n+1} - \frac{1}{a+n} = \frac{a-1}{(n+1)(a+n)}$$

sera encore convergente quelle que soit la valeur réelle ou imaginaire de a. Quant à la constante $-C$, elle est évidemment égale à la valeur que prend pour $a=1$ la dérivée $D_a \log \Gamma(a)$ c'est-à-dire que l'on a :

$$C = -\Gamma'(1) = -\int_0^\infty \log x . e^{-x} dx;$$

cette quantité $C = 0,577215664\ldots\ldots$ est connue sous le nom de constante d'Euler.

Dans la formule que nous venons d'obtenir changeons a en $a+1$; il vient:

$$D_a \log \Gamma(a+1) = -C + \left(1 + \frac{1}{a+1}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{a+n}\right) + \cdots$$

Multiplions de nouveau par da et intégrons entre les limites 0 et a, on en conclut, sans ajouter de constante, les deux membres s'évanouissant par $a=0$.

$$\log \frac{1}{\Gamma(a+1)} = Ca + [\log(1+a) - a] + \cdots + \left[\log\left(1+\frac{a}{n}\right) - \frac{a}{n}\right] + \cdots$$

d'où:

$$\frac{1}{\Gamma(a+1)} = e^{Ca} \Pi \left[\left(1+\frac{a}{n}\right) e^{-\frac{a}{n}}\right].$$

Ce résultat montre que $\frac{1}{\Gamma(a+1)}$ est une fonction holomorphe dans tout le plan, comme l'a établi pour la première fois M. Weierstrass, et en donne l'expression sous forme d'un produit de facteurs primaires.

La même relation écrite de cette manière:

$$\log \Gamma(a+1) = -Ca + [a - \log(1+a)] + \cdots \left[\frac{a}{n} - \log\left(1+\frac{a}{n}\right)\right] + \cdots$$

donne le développement de $\log \Gamma(a+1)$ suivant les puissances croissantes de cette quantité, en supposant le module de a moindre que un. Sous cette condition, la formule de Maclaurin s'applique, en effet, aux logarithmes qui entrent dans le second membre, et en posant comme nous l'avons déjà fait:

$$S_n = 1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \cdots$$

on en conclut:

$$\log \Gamma(a+1) = -Ca + \frac{S_2 a^2}{2} - \frac{S_3 a^3}{3} + \frac{S_4 a^4}{4} - \cdots$$

Nous remarquerons encore qu'en faisant passer dans le premier membre les quantités: $\log\left(1+\frac{a}{1}\right)$, $\log\left(1+\frac{a}{2}\right)$, $\log\left(1+\frac{a}{n-1}\right)$ le champ de convergence s'agrandit et que le développement du second membre subsiste alors pour toutes les valeurs du module de a, moindres que le nombre entier arbitraire n. On obtient ainsi la formule:

$$\begin{aligned}\log \frac{(a+1)(a+2)\cdots(a+n-1)\,\Gamma(a+1)}{\Gamma(n)} &= \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n-1} - C\right) a \\ &+ \left[\frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} + \cdots\right] \frac{a^2}{2} \\ &- \left[\frac{1}{n^3} + \frac{1}{(n+1)^3} + \cdots\right] \frac{a^3}{3} \\ &+ \left[\frac{1}{n^4} + \frac{1}{(n+1)^4} + \cdots\right] \frac{a^4}{4} \\ &- \cdots\cdots\end{aligned}$$

Soit maintenant, afin d'abréger l'écriture: $F(a) = D_a^2 \log \Gamma(a)$ de sorte qu'on ait:

$$F(a) = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{(a+1)^2} + \frac{1}{(a+2)^2} + \cdots$$

Nous déduisons de cette expression les relations suivantes:

$$F(1+a) - F(a) = -\frac{1}{a^2}$$

$$F(1-a) + F(a) = \Sigma \frac{1}{(a+n)^2}$$

la somme se rapportant à toutes les valeurs positives, nulles et négatives de n. On met ainsi en évidence une fonction périodique de a, dont la période est l'unité qu'il est aisé d'obtenir. Différentions à cet effet l'égalité précédemment établie :

$$\pi \cot a\pi = \frac{1}{a} + \sum \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{a-n} \right)$$

où n parcourt la série des entiers positifs et négatifs en exceptant la valeur zéro, il vient :

$$\left(\frac{\pi}{\sin a\pi} \right)^2 = \sum \frac{1}{(a+n)^2}$$

$$(n = 0, 1, 2, \ldots .)$$

Nous avons par conséquent ce second théorème :

$$F(1-a) + F(a) = \left(\frac{\pi}{\sin a\pi} \right)^2$$

Considérons enfin, comme le fait Legendre dans les Exercices de calcul intégral, la somme :

$$S = F(a) + F\left(a + \frac{1}{n}\right) + F\left(a + \frac{2}{n}\right) + \ldots + F\left(a + \frac{n-1}{n}\right);$$

on peut l'écrire :

$$S = \sum F\left(a + \frac{k}{n}\right),$$

$$(k = 0, 1, 2, \ldots\ldots n-1)$$

ou bien :

$$S = \sum \frac{1}{\left(a + \frac{k}{n} + \nu\right)^2} = \sum \frac{n^2}{(na + k + n\nu)^2},$$

k variant de 0 à $n-1$ et ν prenant toutes les valeurs entières depuis zéro jusqu'à l'infini.

Or l'expression $k + n\nu$ donne :

pour $k = 0$, tous les multiples de n ;

pour $k = 1$, ces multiples augmentés de 1 ;

pour $k = 2$, ces multiples augmentés de 2, et ainsi de suite ; finalement pour $k = n-1$, on aura tous les multiples de n augmentés de $n-1$. Il en résulte évidemment que $k + n\nu$ prend une valeur entière quelconque, et une fois seulement ; on peut donc écrire :

$$S = \sum \frac{n^2}{(na + k + n\nu)^2} = \sum \frac{n^2}{(na+\mu)^2} = n^2 F(na),$$

$$\mu = (0, 1, 2 \ldots)$$

et l'on en conclut la relation :

$$F(a) + F\left(a + \frac{1}{n}\right) + \ldots + F\left(a + \frac{n-1}{n}\right) = n^2 F(na).$$

Telles sont les trois propriétés fondamentales de $F(a)$; voici maintenant les propriétés correspondantes de $\Gamma(a)$.

En premier lieu, reprenons l'équation :

$$F(a+1) - F(a) = -\frac{1}{a^2}.$$

Intégrons deux fois, il vient :

$$\log \Gamma(a+1) = \log a + \log \Gamma(a) + Ca + C',$$

ou :

$$\log \frac{\Gamma(a+1)}{a\Gamma(a)} = Ca + C',$$

C et C' désignant deux constantes. Or, on a pour toute valeur entière de a, $\Gamma(a+1) = a\Gamma(a)$; C et C' sont par suite nulles; et l'on en conclut quel que soit a:

$$\Gamma(a+1) = a\,\Gamma(a).$$

En second lieu, considérons l'égalité:

$$F(a) + F(1-a) = \left(\frac{\pi}{\sin a\pi}\right)^2;$$

en intégrant encore deux fois, nous obtenons:

$$\log\Gamma(a) + \log\Gamma(1-a) = \log\frac{\pi}{\sin a\pi} + Ca + C',$$

d'où:

$$\Gamma(a)\Gamma(1-a) = \frac{\pi}{\sin a\pi}\, e^{Ca+C'}$$

Pour déterminer C et C', multiplions les deux membres par a; il vient en observant que $a\,\Gamma(a) = \Gamma(1+a)$:

$$\Gamma(1+a)\Gamma(1-a) = \frac{a\pi}{\sin a\pi} e^{Ca+C'}$$

Le premier membre de cette égalité est une fonction paire de a; il en est de même de $\frac{a\pi}{\sin a\pi}$; donc $e^{Ca+C'}$ doit être aussi une fonction paire; par suite $C=0$. Faisons maintenant $a=0$; le premier membre se réduit à l'unité ainsi que $\frac{a\pi}{\sin a\pi}$; donc il vient $e^{C'}=1$. Ainsi la deuxième propriété de la fonction $\Gamma(a)$ s'exprime par la formule:

$$\Gamma(a)\Gamma(1-a) = \frac{\pi}{\sin a\pi}.$$

Dans son excellente thèse sur la fonction $\Gamma(a)$, M. Bourguet remarque que ce théorème met immédiatement en évidence que la fonction $\frac{1}{\Gamma(a)}$ est holomorphe dans tout le plan. Ayant en effet:

$$\frac{1}{\Gamma(1-a)} = \frac{\Gamma(a)\sin a\pi}{\pi},$$

remplaçons dans le second membre $\Gamma(a)$ par $P(a) + Q(a)$. Le produit $\Gamma(a)\sin a\pi$ n'aura plus de pôles et $Q(a)$ étant holomorphe on voit qu'il en est de même de $\frac{1}{\Gamma(1-a)}$

Nous pouvons encore tirer de la formule:

$$\Gamma(a)\Gamma(1-a) = \frac{\pi}{\sin a\pi},$$

une proposition importante donnée par Euler: Soit

$$N = \Gamma\left(\frac{1}{n}\right).\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)\ldots\ldots\Gamma\left(\frac{n-1}{n}\right);$$

on peut aussi écrire:

$$N = \Gamma\left(\frac{n-1}{n}\right).\Gamma\left(\frac{n-2}{n}\right)\ldots\ldots\Gamma\left(\frac{1}{n}\right).$$

En multipliant et appliquant la formule précédente, il vient:

$$N^2 = \frac{\pi^{n-1}}{\sin\frac{\pi}{n}.\sin\frac{2\pi}{n}\ldots\ldots\sin\frac{(n-1)\pi}{n}}.$$

Or, on sait par la Trigonométrie que le dénominateur de cette expression est égal à $\frac{n}{2^{n-1}}$; nous aurons par suite

$$N = \Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)\ldots\Gamma\left(\frac{n-1}{n}\right) = (2\pi)^{\frac{n-1}{2}}.n^{-\frac{1}{2}}.$$

Considérons en dernier lieu la relation :

$$\Sigma \log \Gamma\left(a+\frac{k}{n}\right) = n^2\,\Gamma'(na)$$
$$(k=0,1,2,;\ldots\ldots n-1)$$

nous obtiendrons par l'intégration :

$$\Sigma \log \Gamma\left(a+\frac{k}{n}\right) = \log \Gamma(na) + Ca + C',$$

et voici d'abord la détermination de C'. Écrivons en retranchant $\log a$ des deux membres :

$$\Sigma \log \Gamma\left(a+\frac{k}{n}\right) = \log \frac{\Gamma(na)}{\Gamma(a)} + Ca + C',$$
$$(k=1,2,3,\ldots\ldots n-1)$$

et soit $a=0$; le premier membre devient :

$$\Sigma \log \Gamma\left(\frac{k}{n}\right) = \log N = \log\left[(2\pi)^{\frac{n-1}{2}} n^{-\frac{1}{2}}\right].$$

Pour trouver ensuite la valeur de $\frac{\Gamma(na)}{\Gamma(a)}$, nous observerons qu'on a :

$$\frac{\Gamma(na)}{\Gamma(a)} = \frac{na\,\Gamma(na)}{na\,\Gamma(a)} = \frac{\Gamma(na+1)}{n\,\Gamma(a+1)},$$

de sorte que pour $a=0$, $\frac{\Gamma(na)}{\Gamma(a)}$ est égal à $\frac{1}{n}$. Il vient par conséquent :

$$C' = \log n + \log\left[(2\pi^{\frac{n-1}{2}} n^{-\frac{1}{2}}\right] = \log\left[(2\pi)^{\frac{n-1}{2}} n^{\frac{1}{2}}\right].$$

Pour calculer C, nous changerons a en $a+1$ dans l'égalité :

$$\Sigma \log \Gamma\left(a+\frac{k}{n}\right) = \log \Gamma(na) + Ca + C';$$

et nous retrancherons la nouvelle équation ainsi obtenue de la précédente. En employant la relation $\log \Gamma(a+1) = \log \Gamma(a) + \log a$, on trouve pour le premier membre la quantité $\Sigma \log\left(a+\frac{k}{n}\right)$; $(k=0,1,2\ldots n-1)$; le second s'obtient ensuite en remplaçant a par na, dans l'égalité : $\Gamma(a+n) = (a+1)(a+2)\ldots\ldots(a+n-1)\Gamma(a)$. Nous sommes ainsi amenés à la condition : $\Sigma \log\left(a+\frac{k}{n}\right) = \log[na(na+1)\ldots(na+n-2)] + C$, d'où l'on tire après une réduction facile :

$$C = -n \log n.$$

Par suite, nous pouvons écrire :

$$\Sigma \log \Gamma\left(a+\frac{k}{n}\right) = \log \Gamma(na) - an \log n + \log\left[2\pi^{\frac{n-1}{2}} n^{\frac{1}{2}}\right],$$

et en passant des logarithmes aux nombres :

$$\Gamma(a)\cdot\Gamma\left(a+\frac{1}{n}\right)\ldots\ldots\Gamma\left(a+\frac{n-1}{n}\right) = (2\pi)^{\frac{n-1}{2}} n^{\frac{1}{2}-an}\,\Gamma(na).$$

Après avoir exposé sous un second point de vue la théorie de la fonction Eulérienne en déduisant leurs propriétés de la définition de Gauss.

$$\Gamma(a) = \lim\left[\frac{n^a}{a\left(1+\frac{a}{1}\right)\left(1+\frac{a}{2}\right)\cdots\left(1+\frac{a}{n}\right)}\right]$$

pour n infini, nous reviendrons pour en tirer de nouvelles conséquences aux

intégrales définies qui se présentent dans cette théorie, et nous considérerons en premier l'expression de $\log\Gamma(a)$ par la formule,

$$\log\Gamma(a) = \int_{-\infty}^{0}\left[\frac{e^{ax}-e^{x}}{e^{x}-1} - (a-1)e^{x}\right]\frac{dx}{x}.$$

On peut encore écrire si l'on change a en $a+1$:

$$\log\Gamma(a+1) = \int_{-\infty}^{0}\left[\frac{1-e^{ax}-a(1-e^{x})}{x(1-e^{x})}\right]\frac{e^{x}dx}{x},$$

j'observe maintenant que la variable n'ayant que des valeurs négatives dans l'intégrale, il est permis de remplacer $\frac{1}{1-e^{x}}$ par son développement, $1+e^{x}+e^{2x}+\dots$ Nous trouvons ainsi la série,

$$\log\Gamma(a+1) = \sum\int_{-\infty}^{0}\left[\frac{1-e^{ax}-a(1-e^{x})}{x}\right]e^{nx}dx.$$

$$(n = 1, 2, 3\dots \quad)$$

dont le terme général,

$$\int_{-\infty}^{0}\left[\frac{e^{nx}-e^{(n+a)x}}{x} - a\,\frac{e^{nx}-e^{(n+1)x}}{x}\right]dx,$$ a pour valeur:

$$\log\frac{n}{n+a} - a\log\frac{n}{n+1}, \text{ ou bien } a\log\left(1+\frac{1}{n}\right) - \log\left(1+\frac{a}{n}\right).$$

L'intégrale définie nous conduit donc au résultat de Gauss :

$$\log\Gamma(a+1) = \sum\left[a\log\left(1+\frac{1}{n}\right) - \log\left(1+\frac{a}{n}\right)\right]$$
$$(n = 1, 2, 3, \dots\dots \quad).$$

En second lieu je considère la formule,

$$\frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)} = \int_{-\infty}^{0}\left(\frac{e^{ax}}{e^{x}-1} - \frac{e^{x}}{x}\right)dx;$$

on en déduit pour $a=1$ l'expression suivante de la constante d'Euler,

$$-C = \int_{-\infty}^{0}\left(\frac{e^{x}}{e^{x}-1} - \frac{e^{x}}{x}\right)dx,$$

et il vient en retranchant membre à membre,

$$\frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)} + C = \int_{-\infty}^{0}\frac{e^{ax}-e^{x}}{e^{x}-1}dx$$

Cela étant nous remarquerons que dans le cas où a est une quantité commensurable $\frac{\beta}{\alpha}$, α et β désignant des nombres entiers la substitution $e^{x}=y^{\alpha}$ donne pour transformée l'intégrale d'une fonction rationnelle $\int_{0}^{1}\frac{y^{\beta}-y^{\alpha}}{\alpha y(y^{\alpha}-1)}dy$ qui s'obtient par conséquent sous forme finie explicite. Sans m'arrêter à ce point, j'écris en remplaçant a par $a+1$,

$$D_a\log\Gamma(a+1) + C = \int_{-\infty}^{0}\frac{(1-e^{ax})e^{x}}{1-e^{x}}dx,$$

et, comme tout-à-l'heure, j'introduis au lieu de $\frac{1}{1-e^x}$ un développement en Série. Nous trouvons, ainsi,

$$D_a \log \Gamma(a+1) + C = \Sigma \int_{-\infty}^{0} [e^{nx} - e^{(n+a)x}] dx$$

$$= \Sigma \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+a}\right)$$

$$(n = 1, 2, 3, \ldots\ldots),$$

et en intégrant à partir de la limite $a = 0$,

$$\log \Gamma(a+1) = -Ca + \Sigma \left[\log\left(1+\frac{a}{n}\right) - \frac{a}{n}\right];$$

c'est la relation dont nous avons conclu l'expression de $\frac{1}{\Gamma(a+1)}$, sous forme d'un produit de facteurs primaires.

La recherche de la valeur approchée de $\Gamma(a)$, lorsque a est un grand nombre, a conduit à une autre intégrale désignée par $J(a)$ et qui s'est présentée sous ces deux formes :

$$J(a) = \int_{-\infty}^{0} \frac{[e^x(x-2)+x+2]e^{ax}}{2x^2(e^x-1)} dx,$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{0}^{-\infty} \frac{a \log(1-e^{2\pi x})\, dx}{x^2+a^2}.$$

Nous en avons fait usage en ne considérant que les valeurs réelles de a, et nous avons tiré de la première la limitation $J(a) < \frac{1}{12a}$, ainsi que la Série de Gudermann,

$$J(a) = \Sigma \left[\left(a+n+\frac{1}{2}\right)\log\left(1+\frac{1}{a+n}\right) - 1\right]$$

$$(n = 0, 1, 2 \ldots)$$

Voici un résultat d'une grande importance dont je dois la communication à M.r Stieltjes, qui donne une limite inférieure de l'intégrale pour une valeur imaginaire de a représentée par l'expression, $a = Re^{i\theta}$, en supposant l'argument θ compris entre $-\pi$ et $+\pi$. L'éminent géomètre observe que le terme général de la série de Gudermann, $\left(a+n+\frac{1}{2}\right)\log\left(1+\frac{1}{a+n}\right) - 1$, s'exprime ainsi, $\int_0^1 \frac{\frac{1}{2}-x}{a+n+x} dx$, ou encore

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\frac{1}{2}-x}{a+n+x} dx + \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{\frac{1}{2}-x}{a+n+x} dx.$$

En changeant x en $1-x$ dans la seconde intégrale on a donc

$$J(a) = \Sigma \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\frac{1}{2}-x}{n+a+x} - \frac{\frac{1}{2}-x}{n+a+1-x}\right) dx$$

$$= \Sigma \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\frac{1}{2}(1-2x)^2\, dx}{(n+a+x)(n+a+1-x)}$$

$$(n = 0, 1, 2, 3, \ldots\ldots\ldots)$$

et de cette expression résulte d'abord la limite $J(a) < \frac{1}{12a}$, lorsque a est une quantité réelle et positive.

L'identité suivante,

$$(n+a+x)(n+a+1-x) = (n+a)(n+a+1)+x(1-x)$$

montre en effet que pour des valeurs de la variable moindres que l'unité, on peut écrire,

$$(n+a+x)(n+a+1-x) < (n+a)(n+a+1),$$

et par conséquent

$$J(a) < \int_0^{\frac{1}{2}} \sum \frac{1}{(n+a)(n+a+1)} \cdot \frac{1}{2}(1-2x)^2 dx.$$

On en conclut le résultat annoncé,

$$J(a) < \frac{1}{12a}$$

puisqu'on a :

$$\sum \frac{1}{(n+a)(n+a+1)} = \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{a+1}\right) + \left(\frac{1}{a+1} - \frac{1}{a+2}\right) + \cdots = \frac{1}{a}$$

et ; $$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{2}(1-2x)^2 dx = \frac{1}{12}.$$

Soit ensuite $a = Re^{i\theta}$, nous aurons comme on sait :

$$\text{Mod}\, J(a) < \sum \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\frac{1}{2}(1-2x)^2 dx}{\text{Mod}\,(n+a+x)(n+a+1-x)};$$

J'observe ensuite que l'égalité suivante où A désigne une quantité réelle,

$$\text{Mod}^2(A+Re^{i\theta}) = A^2 + 2AR\cos\theta + R^2$$

$$= (A+R)\cos^2\frac{\theta}{2} + (A-R)\sin^2\frac{\theta}{2},$$

donne lorsqu'on suppose A positif et θ compris entre $-\pi$ et $+\pi$, de sorte que $\cos\frac{\theta}{2}$ soit également positif, la condition

$$\text{Mod}\,(A+Re^{i\theta}) < (A+R)\cos\frac{\theta}{2}$$

ou bien :

$$\text{Mod}\,(A+a) < (A+R)\cos\frac{\theta}{2}.$$

Faisons successivement $A = n+x$, $A = n+1-x$ et multiplions membre à membre nous obtenons ainsi :

$$\text{Mod}\,(n+a+x)(n+a+1-x) < (n+R+x)(n+R+1-x)\cos^2\frac{\theta}{2}.$$

De là résulte qu'on peut écrire :

$$\text{Mod}\, J(a) < \sum \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\frac{1}{2}(1-2x)^2 dx}{(n+R+x)(n+R+1-x)\cos^2\frac{\theta}{2}},$$

c'est à dire : $$\text{Mod}\, J(a) < \frac{1}{\cos^2\frac{\theta}{2}} J(R)$$

et à fortiori :

$$\text{Mod}\, J(a) < \frac{1}{12R\cos^2\frac{\theta}{2}}$$

Ce beau résultat de M.r Stieltjes sert de base à l'étude de la fonction $\Gamma(a)$ pour des valeurs imaginaires de la variable que nous n'entreprendrons pas dans ces leçons.

Je considérerai en dernier lieu l'intégrale $\int_0^1 (1-t)^{a-1} t^{b-1} dt$ dont nous avons obtenu l'expression par la formule $\frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$, je remplacerai b par une variable x, et je montrerai comment la relation.

$$\frac{\Gamma(a)\Gamma(x)}{\Gamma(a+x)} = \int_0^1 (1-t)^{a-1} t^{x-1} dt$$

qui suppose a et x positifs, peut être étendue à toutes les valeurs de la variable et donner l'expression analytique de la fonction uniforme $\frac{\Gamma(a)\Gamma(x)}{\Gamma(a+x)}$. Pour cela je développe l'intégrale en série, en employant la formule du binôme,

$$(1-t)^{a-1} = \sum \frac{(-1)^n (a-1)(a-2)\cdots(a-n)}{1.2\ldots n} t^n$$

qui a lieu depuis $t=0$ jusqu'à $t=1$, comme Abel l'a démontré. Or il arrive que le développement ainsi obtenu, à savoir :

$$\int_0^1 (1-t)^{a-1} t^{x-1} dt = \sum \frac{(-1)^n (a-1)(a-2)\ldots(a-n)}{1.2\ldots n.(x+n)}$$

est convergent pour toute valeur réelle ou imaginaire de x.

Soit donc pour abréger,

$$R_n = \frac{(-1)^n (a-1)(a-2)\ldots(a-n)}{1.2\ldots n}$$

en convenant de faire $R_0 = 1$, nous aurons dans tout le plan, d'après le théorème de Riemann, la formule :

$$\frac{\Gamma(a)\Gamma(x)}{\Gamma(a+x)} = \sum \frac{R_n}{x+n},$$

$$(n = 0, 1, 2, \ldots\ldots)$$

Observons maintenant que la fonction $\frac{\Gamma(a)\Gamma(x)}{\Gamma(a+x)}$ a uniquement pour pôles ceux de $\Gamma(x)$, le facteur $\frac{1}{\Gamma(a+x)}$ étant holomorphe. Il en résulte que pour $x=-n$ son résidu est celui de $\Gamma(x)$ que nous savons être égal à $\frac{(-1)^n}{1.2.\ldots n}$ (p. 139) multiplié par $\frac{\Gamma(a)}{\Gamma(a+n)} = (a-1)(a-2)\ldots(a-n)$, c'est-à-dire la quantité R_n. L'expression obtenue est donc celle que donne le théorème de M. Mittag-Leffler, et en même temps on a trouvé que la fonction holomorphe figurant dans l'énoncé de ce théorème est nulle. Mais nous avons supposé essentiellement la constante a positive, c'est une autre forme analytique qui se présente lorsque cette condition n'a plus lieu.

Pour y parvenir, je fais $a = a'-k$, k désignant un nombre entier et a' une quantité positive.

Au moyen de la relation :

$$\Gamma(x-k) = \frac{\Gamma(x)}{(x-1)(x-2)\ldots(x-k)},$$

nous aurons alors :
$$\frac{\Gamma(a)\Gamma(x)}{\Gamma(a+x)} = \frac{(x+a'-1)(x+a'-2)\dots(x+a'-k)}{(a'-1)(a'-2)\dots(a'-k)}\cdot\frac{\Gamma(a')\Gamma(x)}{\Gamma(a'+x)},$$
de sorte qu'en posant pour abréger :
$$F(x) = \frac{(x+a'-1)(x+a'-2)\dots(x+a'-k)}{(a'-1)(a'-2)\dots(a'-k)}$$
la relation :
$$\frac{\Gamma(a)\Gamma(x)}{\Gamma(a+x)} = F(x)\frac{\Gamma(a')\Gamma(x)}{\Gamma(a'+x)}$$
ramène le nouveau cas au premier.

Soit pour un instant R'_n, ce que devient R_n lorsqu'on change a en a', c'est-à-dire :
$$R'_n = \frac{(-1)^n(a'-1)(a'-2)\dots(a'-k)}{1, 2, \dots n}$$
et remarquons que l'on a, comme on le vérifie facilement :
$$R'_n F(-n) = R_n.$$

Faisons ensuite :
$$\frac{F(x)-F(-n)}{x+n} = F_n(x)$$
en désignant par $F_n(x)$ un polynôme entier en x de degré $k-1$.
On écrira successivement
$$\frac{\Gamma(a)\Gamma(x)}{\Gamma(a+x)} = \sum\frac{R'_n F(x)}{x+n}$$
$$= \sum\left[\frac{R'_n F(-n)}{x+n} - R'_n F_n(x)\right]$$
$$= \sum\left[\frac{R_n}{x+n} - R'_n F(x)\right]$$
et l'expression ainsi obtenue est encore celle que donne le théorème de M. Mittag-Leffler. Nous avons en même temps l'exemple qui a été précédemment annoncé de formes diverses dont cette expression est susceptible. Effectivement, le nombre entier k étant assujetti à la seule condition que la partie réelle de $a+k$ soit positive, peut prendre, à partir d'une certaine limite, telle valeur que l'on veut. On voit aussi que la série des fractions $\frac{R_n}{x+n}$ a été rendue convergente autrement que par le procédé général qui consiste à lui ajouter le polynôme
$$R_n\left[\frac{1}{n} + \frac{x}{n^2} + \dots + \frac{x^{\nu-1}}{n^\nu}\right].$$

Je considère en dernier lieu l'expression :
$$f(x) = \frac{\Gamma(x+a)\Gamma(x+b)\dots\Gamma(x+l)}{\Gamma(x+a')\Gamma(x+b')\dots\Gamma(x+l')}$$
où je suppose d'abord les constantes $a, b \dots l; a', b', \dots l'$, toutes réelles ; je désignerai

par μ le nombre des facteurs tant au numérateur qu'au dénominateur, et je ferai pour abréger :

$$S = a + b + \dots l ,$$
$$S' = a' + b' + \dots l' .$$

Cela étant, les pôles de $f(x)$ seront ceux des fonctions $\Gamma(x+a), \Gamma(x+b), \dots \Gamma(x+l)$, c'est-à-dire : $x = -(a+n)$, $x = -(b+n)$, ... $x = -(l+n)$, n étant zéro ou un nombre entier positif quelconque. Représentons par A_n, B_n, ... L_n les résidus qui leur correspondent, je dis qu'il existe toujours un exposant i, tel que les séries :

$$\sum \frac{A_n}{(n+a)^i}, \quad \sum \frac{B_n}{(n+b)^i}, \dots \sum \frac{L_n}{(n+l)^i}$$

soient convergentes.

Raisonnons pour fixer les idées sur la première, et employons l'expression de A_n, à savoir :

$$A_n = -\frac{(n+a-a')(n+a-b')\dots(n+a-l')}{n(n+a-b)\dots(n+a-l)}$$

En la comparant à A_{n-1}, on en tire facilement la relation :

$$\frac{A_n}{A_{n-1}} = -\frac{(n+a-a')(n+a-b')\dots(n+a-l')}{n(n+a-b)\dots\dots(n+a-l)}$$

et si nous faisons pour un moment :

$$U_n = \frac{(-1)^n A_n}{(n+a)^i},$$

on voit qu'on aura :

$$\frac{U_n}{U_{n-1}} = \frac{(n+a-1)^i (n+a-a')(n+a-b')\dots(n+a-l')}{n(n+a)^i (n+a-b)\dots(n+a-l)} .$$

Nous pouvons donc immédiatement obtenir la condition de convergence de la série $\sum \frac{A_n}{(n+a)^i}$, en appliquant la règle de Gauss. Remarquant à cet effet qu'on obtient facilement :

$$\frac{U_n}{U_{n-1}} = \frac{n^{\mu+i} + n^{\mu+i-1}[(\mu+i)a - S' - i] + \dots}{n^{\mu+i} + n^{\mu+i-1}[(\mu+i)a - S] + \dots}$$

nous trouvons donc d'après cette règle :

$$(\mu+i)a - S' - i - [(\mu+i)a - S] + 1 < 0,$$

et par conséquent :

$$i > S - S' + 1.$$

On doit donc prendre pour l'exposant i le nombre entier immédiatement supérieur à $S - S' + 1$, et de la forme même de cette condition il résulte que les autres séries : $\sum \frac{B_n}{(n+b)^i}$, ... $\sum \frac{L_n}{(n+l)^i}$ seront convergentes comme la première. J'ajoute enfin que dans le cas général où les constantes $a, b, \dots l, a', b', \dots l'$ sont imaginaires de sorte qu'on ait :

$$S = \sigma + \sigma_0 i$$
$$S' = \sigma' + \sigma'_0 i$$

une extension facile de la règle de Gauss montre qu'il faut supposer alors :

$$i > \sigma - \sigma' + 1$$

et cette condition comprend comme cas particulier celle que nous avons précédemment obtenue.

Soit en particulier $S = S'$, nous aurons $i = 2$, et la partie méromorphe de la fonction que nous avons considérée, aura pour expression.

$$\begin{aligned} &\Sigma A_n\left(\frac{1}{x+n+a} - \frac{1}{n+a}\right) \\ &+ \Sigma B_n\left(\frac{1}{x+n+b} - \frac{1}{n+b}\right) \\ &\dots\dots\dots\dots\dots \\ &+ \Sigma L_n\left(\frac{1}{x+n+l} - \frac{1}{n+l}\right) \end{aligned}$$

n prenant dans ces séries toutes les valeurs entières à partir de zéro.

Nous considérerons pour dernière application du théorème de M. Mittag-Leffler, la fonction $f(x) = \dfrac{\Gamma(x)}{\Gamma(x+a)\Gamma(x+b)}$, en supposant a et b réels pour plus de simplicité. Soit R_n, le résidu correspondant au pôle $x = -n$, on aura :

$$R_n = \frac{(-1)^n}{1,2,\dots n}\ \frac{1}{\Gamma(a-n)\Gamma(b-n)},$$

ou sous une autre forme :

$$R_n = \frac{(-1)^n F_n(a)F_n(b)}{1,2,\dots n\ \Gamma(a)\Gamma(b)},$$

si l'on fait pour abréger :

$$F_n(x) = (x-1)(x-2)\dots(x-n).$$

Cela posé je dis qu'il est impossible de déterminer comme précédemment un nombre constant i, tel que la série $\Sigma \dfrac{R_n}{n^i}$, en prenant ses termes en valeur absolue soit convergente. Désignons en effet par U_n la valeur absolue de $\dfrac{R_n}{n^i}$, de la relation facile à trouver :

$$\frac{R_n}{R_{n-1}} = -\frac{(n-a)(n-b)}{n},$$

on conclut :

$$\frac{U_n}{U_{n-1}} = \frac{(n-1)^i(n-a)(n-b)}{n^{i+1}},$$

et l'on voit que ce rapport augmentant avec n, la série ΣU_n est divergente. Nous avons par conséquent l'exemple d'une fonction présentant cette circonstance, que dans l'expression de la partie méromorphe, les degrés des polynômes entiers qu'on retranche des fractions simples, doivent croître indéfiniment. Considérant alors un exposant ν, variable avec n, il s'agit de le déterminer de manière que la série $\Sigma \dfrac{R_n x^\nu}{n^\nu}$ soit convergente pour toute valeur de x. Or il suffit pour cela de supposer $\nu = 2n$; effectivement nous trouvons alors, pour la valeur absolue du rapport entre les termes de rang n et $n-1$ l'expression suivante :

$$x^2\frac{(n-a)(n-b)}{n}\cdot\frac{(n-1)^{2n-2}}{n^{2n}}$$

qu'on peut écrire ainsi :

$$\frac{x^2}{n}\cdot\frac{(n-a)(n-b)}{n^2}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{2n-2}$$

Sous cette forme on reconnaît immédiatement que, quelque soit x, elle est nulle pour n infini :

De ce que nous venons d'établir résulte qu'en désignant par $G(x)$ une fonction holomorphe, on a la formule :

$$\frac{\Gamma(x)}{\Gamma(x+a)\Gamma(x+b)} = G(x) + \frac{R_0}{x} + R_1\left(\frac{1}{x+1} - 1\right)$$
$$+ R_2\left(\frac{1}{x+2} - \frac{1}{2} - \frac{x}{2^2} - \frac{x^2}{2^3}\right)$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$+ R_n\left(\frac{1}{x+n} - \frac{1}{n} - \frac{x}{n^2} - \cdots - \frac{x^{2n-2}}{n^{2n-1}}\right)$$
$$\cdots\cdots\cdots$$

16ème Leçon

Nous avons remarqué dans la 9e leçon, p. , qu'en désignant par S un contour fermé, l'intégrale de Cauchy, $\frac{1}{2i\pi}\int_S \frac{f(z)\,dz}{z-x}$ a pour valeur $f(x)$ ou zéro suivant que la variable x est à l'intérieur ou à l'extérieur de ce contour. La courbe d'intégration est donc une ligne de discontinuité, et le calcul intégral nous a ainsi donné l'exemple d'une expression analytique bien différente des fonctions uniformes précédemment étudiées, qui ont pour caractère fondamental de n'être discontinues qu'en des points isolés. Nous nous proposons maintenant de montrer que sans recourir aux intégrales curvilignes, les intégrales définies prises dans le sens élémentaire d'une succession de valeurs réelles de la variable, suffisent pour donner la notion nouvelle et d'une grande importance de fonctions uniformes affectées de coupures; cette remarque appellera notre attention, comme conduisant par une voie naturelle et facile à un ordre de considérations qui jouent un rôle fondamental dans les travaux de Riemann. Un cas particulier fort simple s'est déjà offert; nous avons dû, sous le point de vue qui va nous occuper, faire l'étude de l'intégrale $J = \int^{\beta} \frac{dt}{1+tz}$, afin d'étendre à tout le plan la fonction arc tg x dont la définition première est limitée aux valeurs réelles de la variable. Je vais y revenir en modifiant légèrement l'expression précédente, et j'envisagerai à cause de son importance, la fonction

$$\Phi(z) = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{dt}{z-a-ib+t},$$

où les limites α et β sont des quantités réelles

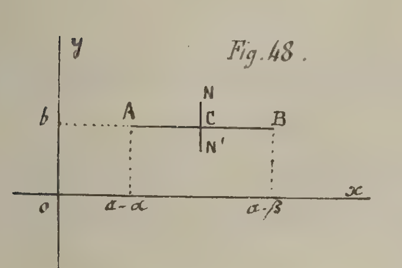
Nous remarquerons d'abord que l'intégrale n'est point déterminée pour les valeurs de z qui satisfont à la condition :

$$z - a - ib + t = 0.$$

Soit donc $z = x + iy$; les solutions de cette équation s'obtiennent en posant

$$x = a - t$$
$$y = b ,$$

où t varie de α à β et l'on obtient ainsi un segment de droite AB parallèle à l'axe des abscisses. Il en résulte que pour un point z pris sur ce segment, la fonction $\Phi(z)$ n'a pas d'existence, tandis que pour tout autre point du plan, elle a une valeur unique, parfaitement déterminée. Je dis maintenant que AB est une coupure : Prenons sur une perpendiculaire à AB élevée au point C et à des distances égales de C les points N et N'.



Nommons θ la valeur de t qui donne le point C, et soit $CN = CN' = \lambda$. Posons de plus $\zeta = a + ib - \theta$; l'affixe du point N sera ainsi : $\zeta + i\lambda$, et celle du point N' : $\zeta - i\lambda$, de sorte qu'on a en remplaçant ζ par sa valeur :

$$\Phi(N) = \int_\alpha^\beta \frac{dt}{t-\theta+i\lambda} \; ; \; \Phi(N') = \int_\alpha^\beta \frac{dt}{t-\theta-i\lambda} \; ;$$

nous concluons de là ;

$$\Phi(N) - \Phi(N') = -2i \int_\alpha^\beta \frac{\lambda\, dt}{(t-\theta)^2+\lambda^2} ,$$

et par conséquent

$$\Phi(N) - \Phi(N') = -2i \left(\operatorname{arc\,tg} \frac{\beta-\theta}{\lambda} - \operatorname{arc\,tg} \frac{\alpha-\theta}{\lambda} \right)$$

Si θ n'est pas compris entre α et β, cette expression est nulle en faisant $\lambda = 0$. Mais si θ est compris entre α et β, $\Phi(N) - \Phi(N')$ tend vers $-2i\pi$, car on a pour λ infiniment petit et positif :

$$\operatorname{arc\,tg} \frac{\beta-\theta}{\lambda} = \frac{\pi}{2}$$

et

$$\operatorname{arc\,tg} \frac{\alpha-\theta}{\lambda} = -\frac{\pi}{2}.$$

Le segment AB est donc une coupure pour la fonction manifestement uniforme $\Phi(z)$. En même temps nous voyons que l'intégrale $\int_\alpha^\beta \frac{2i\lambda\, dt}{(t-\theta)^2+\lambda^2}$ n'est pas toujours nulle avec λ. En supposant, en effet, θ compris entre α et β, elle est égale à $2i\pi$ pour une valeur infiniment petite de cette quantité. C'est ce qu'on appelle une intégrale singulière. Les éléments d'une pareille intégrale sont nuls, sauf l'élément unique et infini qui correspond à $t = \theta$. Les intégrales singulières ont été souvent employées par Cauchy et Poisson, mais elles n'ont plus un rôle aussi étendu, dans les travaux analytiques de notre époque.

Le résultat qu'on vient d'obtenir si facilement s'applique à la détermination des intégrales définies, mais il est nécessaire d'abord de faire quelques remarques.

Soit $f(z)$ une fonction uniforme qui devient infinie pour $z = a + ib$; les points du plan pour lesquels la fonction :

$$\Phi(z) = \int_\alpha^\beta D_t\, f(t+z)\, dt$$

n'est point déterminée par l'intégrale, s'obtiennent en posant :

$$t + z = a + ib,$$

d'où :

$$\begin{cases} x = a - t \\ y = b \end{cases},$$

équation représentant, comme nous l'avons déjà dit, un segment de droite AB, parallèle à Ox.

Fig. 49

Prenons, comme plus haut, deux points N et N' de part et d'autre de AB, sur une perpendiculaire en C à cette droite, et soit $CN = CN' = \lambda$.

Je dis que dans le cas présent la variation de la fonction $\Phi(z)$ aux deux bords de la coupure, c'est-à-dire : $\Phi(N) - \Phi(N')$ est infiniment petite avec λ, tandis que dans le cas traité plus haut cette différence était $-2i\pi$.

Soit θ la valeur de t qui donne le point $a+ib$, que je désignerai par c pour abréger. Nommons ξ la valeur correspondante de z de sorte qu'on ait : $\theta + \xi = c$. L'affixe du point N sera $\xi + i\lambda$; et nous aurons :

$$\Phi(N) = f(\beta + \xi + i\lambda) - f(\alpha + \xi + i\lambda),$$

puis en remplaçant ξ par sa valeur $\Phi(N) = f(c + \beta - \theta + i\lambda) - f(c + \alpha - \theta + i\lambda)$.

Pour toutes les valeurs de θ différentes de β ou de α les deux termes de cette expression ne seront pas infinis lorsqu'on suppose $\lambda = 0$, et on pourra développer $\Phi(N)$ en série ordonnée suivant les puissances de λ par la formule de Mac-Laurin. En remarquant que $\Phi(N')$ se déduit de $\Phi(N)$ en changeant λ en $-\lambda$; on voit immédiatement que $\Phi(N) - \Phi(N')$ est infiniment petit avec λ.

Cela posé, envisageons une fonction rationnelle, ou en général une fonction uniforme quelconque $f(t)$, et soit :

$$\Phi(z) = \int_\alpha^\beta f(t+z)\, dt,$$

A chacune des discontinuités polaires ou essentielles de $f(t)$ correspond une coupure pour $\Phi(z)$; ces coupures sont représentées par des segments de droite parallèles à Ox.

Cherchons la variation de $\Phi(z)$ aux deux bords de la coupure qui correspond à une discontinuité $t = a$ de $f(t)$.

On sait que l'on a :

$$f(t) = \Sigma\left[G_a\left(\frac{1}{t-a}\right) + P_a(t)\right],$$

G_a et P_a désignant une fonction holomorphe et un polynôme entier.

Or le terme qui rend $\Phi(z)$ discontinue pour $t = a$ provient de $G_a\left(\frac{1}{t-a}\right)$, et nous avons vu qu'on pouvait écrire :

$$G_a\left(\frac{1}{t-a}\right) = \frac{A}{t-a} + H'_a\left(\frac{1}{t-a}\right),$$

H'_a désignant la dérivée d'une fonction holomorphe et A représentant le résidu de $f(t)$ relatif à $t=a$. Ce que nous avons établi montre donc que la variation $\Phi(N)-\Phi(N')$ aux deux bords de la coupure correspondant à la discontinuité considérée de $f(t)$ est égale à $-2i\pi A$, c'est-à-dire au produit de $-2i\pi$ par le résidu de $f(t)$ relatif à $t=a$.

Nous appliquerons ces résultats en premier lieu au calcul de l'intégrale $J=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt$, où $f(t)$ désigne une fonction rationnelle de la variable réelle t. On se rappelle que la fonction $f(t)$ doit être finie pour toutes les valeurs réelles de la variable, de sorte que tous ses pôles seront imaginaires. De plus, la circonstance de limites infinies exige, à l'égard de la fonction rationnelle $f(t)$ que le degré du numérateur soit inférieur de deux unités au moins à celui du dénominateur. Au reste, cette condition nécessaire va se présenter d'elle-même comme conséquence de la méthode que nous allons exposer.

Remarquons, en premier lieu que la fonction :

$$\Phi(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t+z)\,dt$$

est indépendante de z. Ayant en effet :

$$\Phi'(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f'(t+z)\,dt,$$

on voit que $\Phi'(z)$ est la différence des valeurs de $f(t+z)$ pour $t+\infty$ et $t=-\infty$, mais d'après ce que nous avons dit des conditions que doit remplir la fonction $f(t)$, ces deux valeurs sont nulles ; par suite $\Phi'(z)=0$. $\Phi(z)$ est donc indépendant de z, mais sa valeur constante entre certaines limites, change en passant d'un intervalle à un autre, comme on va voir.

Remarquons d'abord que z ayant une valeur imaginaire infinie, la fonction $f(t+z)$ est nulle, de sorte qu'on a alors :

$$\Phi(z)=0.$$

Observons ensuite que $a+bi$ étant un des pôles de $f(t)$, la coupure qui lui correspond sera donnée par les équations : $x=a-t$, $y=b$, où t varie de $-\infty$ à $+\infty$.

Ce sera donc une droite indéfinie parallèle à Ox dont l'ordonnée est égale au coefficient de i.

Fig. 50.

Cela étant, nous rangerons les pôles de $f(t)$ par ordre de grandeur croissantes des coefficients de i, de sorte qu'ils soient ainsi désignés par :

$$a_0+ib_0,\ a_1+ib_1,\ \ldots\ldots\ a_n+ib_n,$$

et nous tracerons les parallèles à Ox ayant les valeurs de ces coefficients pour ordonnées. Le système des coupures de $\Phi(z)$ sera donc formé des droites.

$$P_0,\ P_1,\ \ldots\ldots P_n.$$

Cela posé, lorsque z a une valeur imaginaire très grande,

dans laquelle le coefficient de i est négatif, $\Phi(z)$, comme nous l'avons vu, est nulle et, par conséquent, restera nulle dans toute la région du plan située au dessous de la première coupure. En franchissant cette ligne, $\Phi(z)$ éprouve une variation représentée ainsi que nous l'avons démontré, par $-2i\pi R_0$, R_0 désignant le résidu de $f(t)$ relatif au pôle a_0+ib_0 correspondant à cette coupure. On trouvera de même, si l'on dépasse la seconde ligne:

$$\Phi(z) = -2i\pi(R_0+R_1),$$

et en continuant ainsi de proche en proche, on voit que la valeur de la fonction dans la région du plan comprise entre les coupures P_k et P_{k+1}, sera:

$$-2i\pi(R_0+R_1+\cdots R_k),$$

R_k désignant en général le résidu de $f(t)$ relatif au pôle a_k+ib_k.

Enfin, et en dernier lieu, la valeur de $\Phi(z)$ dans la portion du plan située au-dessous de la dernière coupure P_n est $-2i\pi(R_0+R_1+\cdots\cdots+R_n)$. Mais, d'après ce que nous avons dit plus haut, dans cette même portion du plan, $\Phi(z)$ a pour valeur zéro. Donc la somme des résidus, c'est-à-dire ce que Cauchy appelle le résidu intégral de la fonction, doit être nul. On voit immédiatement que cette condition est équivalente à celle que nous avons énoncée plus haut, savoir: que le degré du numérateur de $f(t)$ doit être inférieur de deux unités au moins à celui du diviseur; il suffit pour s'en convaincre, de décomposer $f(t)$ en fractions simples et de développer chacune de ces fractions suivant les puissances décroissantes de la variable.

L'intégrale J étant égale à $\Phi(0)$, on voit qu'en supposant l'axe Ox, compris entre les coupures P_k et P_{k+1}, on a:

$$J = -2i\pi(R_0+R_1+\cdots\cdots+R_k),$$

ou bien d'après la condition $R_0+R_1+\cdots\cdots R_n = 0$,

$$J = 2i\pi(R_{k+1}+R_{k+2}+\cdots\cdots+R_n).$$

L'expression cherchée $J = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt$ est donc égale au produit de $2i\pi$ par la somme des résidus relatifs aux pôles de $f(t)$, qui sont situés au-dessus de l'axe Ox, c'est le résultat déjà obtenu, page 111 au moyen du théorème de Cauchy, qui donne la valeur de l'intégrale d'une fonction uniforme relative à un contour fermé.

Pour seconde application, je me propose de retrouver pareillement la valeur de l'intégrale:

$$J = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{at}-e^{bt}}{1-e^{t}}\,dt,$$

et en suivant la même voie que pour la détermination de l'intégrale des fonctions rationnelles je considère la fonction:

$$\Phi(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{a(t+z)}-e^{b(t+x)}}{1-e^{(t+z)}}\,dt.$$

On voit d'abord que le système des coupures est donné par l'équation:

$y = 2k\pi$, où k reçoit toutes les valeurs entières, positives ou négatives, sauf $k=0$. Cela posé, remarquons que la fonction $f(t)$ n'étant plus rationnelle, mais transcendante, l'expression $\Phi(z) = \int^{+\infty} f(t+z)\,dt$ reste encore constante par rapport à z dans l'espace limité par deux coupures consécutives. J'envisagerai en particulier celles qui correspondent à $K=1$ et $K=2$; la valeur de la constante s'obtiendra dans cet intervalle comme il suit. Soient R_1 et R_2 les résidus de la fonction $f(t) = \frac{e^{at}-e^{bt}}{1-e^t}$ pour $t = 2i\pi$ et $t = 4i\pi$; nous aurons en franchissant successivement les coupures $y = 2\pi$, $y = 4\pi$:

$$\Phi(z+2i\pi) = \Phi(z) - 2i\pi R_1,$$
$$\Phi(z+4i\pi) = \Phi(z) - 2i\pi(R_1+R_2)$$

Or, on trouve en faisant pour abréger:

$$\alpha = e^{2ai\pi}, \qquad \beta = e^{2bi\pi}$$

les valeurs suivantes des résidus, à savoir:

$$R_1 = \beta - \alpha, \qquad R_2 = \beta^2 - \alpha^2;$$

on obtient aussi, comme $f(t)$ contient linéairement les deux exponentielles e^{at} et e^{bt}, la relation:

$$f(t+4i\pi) - (\alpha+\beta) f(t+2i\pi) + \alpha\beta f(t) = 0.$$

Nous en déduisons la suivante, à savoir:

$$\Phi(z+4i\pi) - (\alpha+\beta)\Phi(z+2i\pi) + \alpha\beta\,\Phi(z) = 0,$$

et il suffit d'y remplacer $\Phi(z+4i\pi)$ et $\Phi(z+2i\pi)$ par les expressions données plus haut, pour en tirer immédiatement:

$$\Phi(z) = \frac{2i\pi\left[R_1+R_2-(\alpha+\beta)R_1\right]}{(1-\alpha)(1-\beta)} = i\pi\left(\frac{1+\beta}{1-\beta} - \frac{1+\alpha}{1-\alpha}\right).$$

Introduisons enfin au lieu de α et β leurs valeurs et supposons en particulier $z=0$, on aura l'intégrale obtenue page 118

$$J = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{at}-e^{bt}}{1-e^t}\,dt = \pi(\cot a\pi - \cot b\pi).$$

Nous allons maintenant en nous plaçant à un point de vue plus général, considérer la fonction:

$$\Phi(z) = \int_\alpha^\beta \frac{F(t,z)}{G(t,z)}\,dt,$$

où l'intégrale est toujours prise entre des limites réelles, les quantités $F(t,z)$ et $G(t,z)$ étant holomorphes en t et z.

Comme précédemment, nous remarquerons que cette intégrale a une valeur unique et finie pour tous les points du plan, à l'exception du lieu qu'on détermine par la condition $G(t,z) = 0$. Cette équation fait correspondre à la série des valeurs réelles de t croissant de α à β, un nombre tantôt fini, tantôt infini de portions de courbes, ou de courbes entières, suivant les cas, indiquant ainsi les points du plan où l'intégrale ne donne plus la valeur de la fonction. Nous nous proposons d'établir que ces courbes ont la propriété caractéristique des coupures.

Fig. 51.

Soit AMB l'une d'elles, rapportée aux axes rectangulaires Ox, Oy, et M un de ses points, pour lequel on a $t=\theta$, $z=\zeta$, et par conséquent $G(\theta,\zeta)=0$. Je vais calculer la différence des valeurs de $\Phi(z)$ aux points N et N', pris sur la normale en M à des distances infiniment petites MN, MN' égales entre elles, et faire voir que cette différence est une quantité finie.

Formons d'abord l'équation de la normale en partant de la relation :

$$(X-x)dx+(Y-y)dy=0,$$

où X et Y désignent les coordonnées courantes, et x et y celles de la courbe, que l'on suppose fonctions de t. On peut la remplacer par les deux suivantes :

$$X-x=\lambda\frac{dy}{dt},$$
$$Y-y=-\lambda\frac{dx}{dt},$$

λ étant une indéterminée réelle ; on en tire :

$$X-x+i(Y-y)=\lambda\left(\frac{dy}{dt}-i\lambda\frac{dx}{dt}\right)=-i\lambda\frac{d(x+iy)}{dt},$$

et par conséquent :

$$X+iY=z-i\lambda\frac{dz}{dt}.$$

Maintenant l'équation de la courbe étant donnée sous la forme $G(t,z)=0$, nous en déduisons :

$$\frac{dz}{dt}=-\frac{G'_t(t,z)}{G'_z(t,z)}.$$

En excluant donc les cas où l'on aurait pour certaines valeurs particulières de t et de z, $G'_t(t,z)=0$ ou $G'_z(t,z)=0$, l'affixe d'un point quelconque de la normale sera

$$Z=z+i\lambda\frac{G'_t(t,z)}{G'_z(t,z)}.$$

Faisons ensuite, afin de séparer les quantités réelles et imaginaires :

$$\frac{G'_t(t,z)}{G'_z(t,z)}=p+iq,$$

et nous aurons les relations :

$$X=x-\lambda q,$$
$$Y=y+\lambda p;$$

elles donnent lieu à la remarque suivante :

Supposons d'abord p différent de zéro ; nous nommerons direction positive de la normale la partie de cette droite qui au-delà du point de rencontre avec la courbe s'élève indéfiniment au-dessus de l'axe des abscisses, et direction négative, l'autre partie.

On voit que p étant positif, la direction positive s'obtient si l'on fait croître λ de zéro à l'infini, l'autre direction étant donnée par les valeurs

négatives de l'indéterminée, tandis que ce sera l'inverse dans l'hypothèse de p négatif. Faisons, en second lieu, l'hypothèse de $p=0$; de sorte que la normale soit parallèle à l'axe des abscisses. La direction positive sera alors celle de la partie positive de cet axe et s'obtiendra en donnant à λ des valeurs de signe contraire à celui de q. On peut donc toujours représenter la partie positive de la normale par les équations :

$$X = x - \varepsilon\lambda q,$$
$$Y = y + \varepsilon\lambda p,$$

où λ est positif, ε qui est égal à l'unité en valeur absolue, ayant le signe de p lorsque p n'est point nul, et dans le cas de $p=0$, le signe de $-q$. On aura la partie négative de la normale par les mêmes équations, en y supposant λ négatif.

Ceci établi, posons :

$$G_t(t,z) = P(t,z),$$
$$G'_z(t,z) = Q(t,z),$$
$$F'_z(t,z) = R(t,z),$$

Comme on a au point M, $t=\theta$, $z=\zeta$, l'affixe du point N situé sur la direction positive de la normale sera donnée pour une valeur infiniment petite et positive de λ par la formule :

$$z = \zeta + i\varepsilon\lambda \frac{P(\theta,\zeta)}{Q(\theta,\zeta)}$$

ou plus simplement

$$z = \zeta + \frac{i\varepsilon\lambda P}{Q},$$

en écrivant, pour abréger, P et Q au lieu de $P(\theta,\zeta)$ et $Q(\theta,\zeta)$.

En négligeant les infiniments petits du second ordre, on en conclut :

$$F\left(t,\zeta + \frac{i\varepsilon\lambda P}{Q}\right) = F(t,\zeta) + i\varepsilon\lambda\frac{PR(t,\zeta)}{Q},$$

et

$$G\left(t,\zeta + \frac{i\varepsilon\lambda P}{Q}\right) = G(t,\zeta) + i\varepsilon\lambda\frac{PQ(t,\zeta)}{Q};$$

et ces expressions donneront :

$$\Phi(N) = \int_\alpha^\beta \frac{QF(t,\zeta) + i\varepsilon\lambda PR(t,\zeta)}{QG(t,\zeta) + i\varepsilon\lambda PQ(t,\zeta)}\,dt.$$

Passant ensuite du point N à son symétrique N', il viendra par le changement de λ en λ :

$$\Phi(N') = \int_\alpha^\beta \frac{QF(t,\zeta) - i\varepsilon\lambda PR(t,\zeta)}{QG(t,\zeta) - i\varepsilon\lambda PQ(t,\zeta)}\,dt,$$

et après une réduction facile

$$\Phi(N) - \Phi(N') = -\int_\alpha^\beta \frac{2i\varepsilon\lambda PQ[F(t,\zeta)Q(t,\zeta) - G(t,\zeta)R(t,\zeta)}{Q^2G^2(t,\zeta) + \lambda^2P^2Q^2(t,\zeta)}\,dt.$$

Telle est la quantité dont nous avons maintenant à déterminer la valeur. C'est comme on le voit une intégrale singulière puisque λ doit être supposé infiniment

petit, et nous avons à considérer uniquement les éléments infinis donnés par les valeurs de la variable qui annulent $G(t,\zeta)$. Or, une telle valeur est $t=\theta$; et j'ajoute qu'entre les limites $t=\alpha$, $t=\beta$, l'équation $G(t,\zeta)=0$ ne peut avoir aucune autre racine $t=\theta'$. Cette circonstance ne s'offrira, en effet, qu'autant que $z=\zeta$ sera un point double, et alors, devront avoir lieu, comme il est très facile de le reconnaître, les conditions $G(t,z)=0$, $G'_t(t,z)=0$, $G'_z(t,z)=0$, contrairement aux restrictions qui ont été faites pour obtenir l'équation de la normale. Il suit de là que nous pouvons poser, en négligeant le carré de $(t-\theta)$:

$$G(t,\zeta)=(t-\theta)P;$$

puis remplacer immédiatement la variable t par θ; on trouve ainsi en simplifiant, l'expression :

$$\Phi(N)-\Phi(N')=-\frac{2i\varepsilon F(\theta,\zeta)}{P(\theta,\zeta)}\int_\alpha^\beta\frac{\lambda\,dt}{(t-\theta)^2+\lambda^2}.$$

Or, λ étant infiniment petit, on a, comme nous l'avons déjà vu:

$$\int_\alpha^\beta\frac{\lambda\,dt}{(t-\theta)^2+\lambda^2}=\pi;$$

et par conséquent:

$$\Phi(N)-\Phi(N')=-\frac{2i\pi\varepsilon F(\theta,\zeta)}{P(\theta,\zeta)}.$$

Ce résultat met en évidence pour les courbes que nous considérons le caractère analytique de coupures à l'égard de la fonction $\Phi(z)$.

J'en ferai l'application à la question suivante :

Soit $f(u)$ une fonction uniforme, je considère l'intégrale $\int_{x_0}^{x} f(u)\,du$, prise relativement à une succession de valeurs réelles de la variable, et dont les limites sont par conséquent des quantités réelles. Au moyen de la substitution :

$$u=x_0+(x-x_0)t,$$

on obtient la transformée

$$J=\int_0^1(x-x_0)f[x_0+(x-x_0)t]\,dt,$$

qui offre un sens déterminé pour des valeurs imaginaires de x_0 et x. En remplaçant x par z et x_0 par une constante imaginaire quelconque z_0, nous obtenons ainsi la définition, dans tout le plan, d'une fonction uniforme :

$$\Phi(z)=\int_0^1(z-z_0)f[z_0+(z-z_0)t]\,dt.$$

qui est l'extension de l'intégrale J, par le procédé employé dans la 9ème leçon pour la quantité: $\text{arc tg}\,x=\int_0^x\frac{du}{1+u^2}$

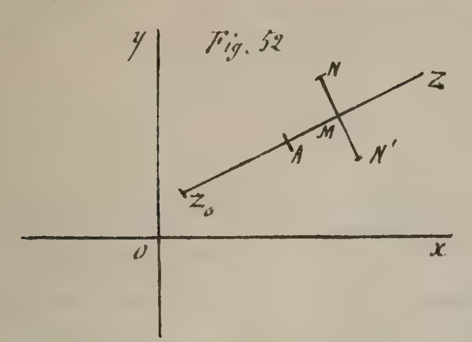
Soit $u=a$ une discontinuité de $f(u)$; la suite des valeurs de z qui satisfont à la condition :

$$z_0+(z-z_0)t=a.$$

lorsque t croît de zéro à l'unité, met en défaut la définition par l'intégrale de

la fonction $\Phi(z)$. En donnant à l'équation précédente la forme :

$$z - z_0 = \frac{a - z_0}{t},$$



on voit que les valeurs dont il s'agit appartiennent à une droite passant par les points Z_0 et A, ayant pour affixes z_0 et a ; les droites relatives aux diverses discontinuités ayant un point commun Z_0, forment donc un faisceau. J'ajoute que si l'on fait décroître t de l'unité à zéro on obtient la portion indéfinie AZ à partir du point A, la portion opposée correspondant aux valeurs positives de $t = 1$ à $t = \infty$, puis aux valeurs negatives.

Ceci posé, je dis que AZ est une coupure de $\Phi(z)$.

Considérons, en effet, dans l'expression de la fonction uniforme $f(u)$, la partie $G_a\left(\frac{1}{u-a}\right)$ qui met en évidence la discontinuité $u = a$, et écrivons-la comme précédemment :

$$G_a\left(\frac{1}{u-a}\right) = \frac{A}{u-a} + H'_a\left(\frac{1}{u-a}\right)$$

Pour obtenir la différence des valeurs de $\Phi(z)$, aux deux points N et N' en regard d'un point M, dont l'affixe est ζ (fig. 52) on prendra simplement $f(u) = \frac{A}{u-a}$, et par conséquent :

$$\Phi(z) = \int_0^1 \frac{A(z-z_0)\,dt}{z_0 - a + (z-z_0)t}.$$

Nous avons ainsi :

$$F(t,z) = A(z-z_0)$$
$$G(t,z) = z_0 - a + (z-z_0)t,$$

d'où :

$$P(t,z) = z - z_0$$
$$Q(t,z) = t,$$

et l'on conclut l'expression cherchée :

$$\Phi(N) - \Phi(N') = -\frac{2i\pi\varepsilon A(\zeta - z_0)}{\zeta - z_0} = -2i\pi\varepsilon A.$$

Dans cette formule, le signe de ε reste encore à fixer, ce qui oblige de recourir à la relation :

$$\frac{G'_t(t,z)}{G'_z(t,z)} = p + iq.$$

Supposons qu'au point M on ait $t = \theta$ en même temps que $z = \zeta$, cette équation devient

$$\frac{\zeta - z_0}{\theta} = p + iq,$$

et comme θ est positif, on voit que le signe de p, et par conséquent de ε, est celui de la partie réelle de $\zeta - z_0$, ou encore de $a - z_0$, d'après la relation : $z_0 - a + (\zeta - z_0)\theta = 0$. La variation de la fonction $\Phi(z)$ a donc la même valeur

en tous les points de la coupure. (1)

17ème Leçon.

La considération des intégrales doubles de la forme

$$\int_{t_0}^{t} dt \int_{u_0}^{u_1} \frac{F(t,u,z)}{G(t,u,z)} du,$$

où les limites sont supposées constantes, et les fonctions $F(t,u,z)$, $G(t,u,z)$ holomorphes en t et u, conduit à des questions analogues à celle qui a fait le sujet de la leçon précédente. M. Goursat leur a consacré un mémoire excellent intitulé: sur une classe d'intégrales doubles; Acta mathématica, T. V. page 97, auquel je renvoie. Dans le même ordre d'idées. Laguerre s'est placé à un autre point de vue et a envisagé la fonction définie par l'intégrale double relative à une aire donnée A:

$$\Phi(z) = \iint \frac{F(x,y,z)}{G(x,y,z)} dx\, dy,$$

où $F(x,y,z)$, $G(x,y,z)$ désignent des fonctions réelles finies et continues quelque soit z, dans l'aire A. Sous la condition qu'il n'existe aucune valeur $z=\xi$ telle que la courbe $G(x,y,\xi)=0$ traverse le champ d'intégration, la fonction considérée aura une détermination toujours finie et unique. Mais dans l'hypothèse contraire, la succession des valeurs réelles de z auxquelles correspondent des courbes qui traversent l'air A, forment une ligne d'exception, l'intégrale ne déterminant pas alors la fonction. Soit $z=\xi$ une telle valeur, Laguerre a considéré la différence:

$$(\xi + i\lambda) - \Phi(\xi - i\lambda)$$

et a établi que pour λ infiniment petit, elle représente une quantité finie qu'il a complètement déterminée dans le cas particulier où l'on suppose:

$$F(x,y,z) = f(x,y)$$
$$G(x,y,z) = g(x,y) - z.$$

Fig. 53.

Ce résultat important, énoncé dans un article des Comptes-rendus (T. 99, p. 1065), montre que la ligne d'exception est une coupure de la fonction; une communication bienveillante du savant géomètre me permet d'en donner ici la démonstration.

Soit A l'aire qui sert de limite à l'intégrale, et $\alpha\beta$ la portion de la courbe $g(x,y)=\xi$ qui la traverse. Construisons en désignant par μ une quantité infiniment petite,

---

(1) Voir le Cours d'Analyse de l'École Polytechnique de M. Camille Jordan, T. III, p. 610, où l'étude de la fonction $\Phi(z)$ est présentée sous un point nouveau, plus général et d'un grand intérêt.

positives, les courbes $\mu_0 \nu_0$ et $\mu_1 \nu_1$ dont les équations sont :

$$g(x,y) = \zeta - \mu, \qquad g(x,y) = \zeta + \mu.$$

Il est aisé de voir en considérant la différence :

$$\Phi(\zeta + i\lambda) - \Phi(\zeta - i\lambda) = 2i \iint \frac{\lambda f(x,y)\, dx\, dy}{[g(x,y) - \zeta]^2 + \lambda^2}$$

que l'intégrale du second membre n'aura de valeur sensible, lorsqu'on suppose λ infiniment petit, que dans la portion de la surface A comprise entre les deux courbes $\mu_0 \nu_0$ et $\mu_1 \nu_1$. Effectuons l'intégration par rapport à y, en supposant x constant, et, pour plus de clarté, écrivons u au lieu de y, en réservant cette lettre pour désigner l'ordonnée de la courbe $g(x,y) = \zeta$. Soit encore u_0 et u_1 les ordonnées MM_0, MM_1 des courbes $\mu_0 \nu_0$ et $\mu_1 \nu_1$ pour un abscisse quelconque $OM = x$, u_0 étant inférieur à u_1, on aura :

$$\Phi(\zeta + i\lambda) - \Phi(z - i\lambda) = 2i \int dx \int_{u_0}^{u_1} \frac{\lambda f(x,u)\, dx}{[g(x,u) - \zeta]^2 + \lambda^2},$$

ou bien si nous observons que $f(x,u)$ diffère infiniment peu de $f(x,y)$:

$$\Phi(\zeta + i\lambda) - \Phi(z - i\lambda) = 2i \int f(x,y)\, dx \int_{u_0}^{u_1} \frac{\lambda\, du}{[g(x,u) - \zeta]^2 + \lambda^2}$$

Calculons maintenant l'ordonnée u_0 au moyen de la relation :

$$g(x, u_0) = \zeta - \mu.$$

On peut écrire en négligeant les infiniments petits d'ordre supérieur :

$$g(x, u_0) = g(x, y + u_0 - y) = g(x,y) + (u_0 - y) g'_y(x,y),$$
$$= \zeta + (u_0 - y) g'_y(x,y)$$

Nous avons donc : $\qquad (u_0 - y) g'_y(x,y) = -\mu$

et par conséquent cette valeur

$$u_0 = y - \frac{\mu}{g'_y(x,y)}.$$

Si nous changeons le signe de μ, nous obtenons l'ordonnée de la courbe $\mu_1 \nu_1$.

$$u_1 = + \frac{\mu}{g'_y(x,y)}$$

et comme on a supposé la seconde plus grande que la première, nous écrirons en désignant par $[g'_y(x,y)]$ la valeur absolue de cette dérivée.

$$u_0 = - \frac{\mu}{[g'_y(x,y)]},$$

$$u_1 = y + \frac{\mu}{[g'_y(x,y)]}.$$

L'intégrale que nous calculons devient ainsi

$$2i \int f(x,y)\, dx \int_{y - \frac{\mu}{[g'_y]}}^{y + \frac{\mu}{[g'_y]}} \frac{\lambda\, du}{[g(x,u) - \zeta]^2 + \lambda^2}$$

puis au moyen de la substitution

$$u = y + \lambda t :$$

$$2i \int f(x,y)\,dx \int_{-\frac{\mu}{\lambda[g'_y]}}^{\frac{\mu}{\lambda[g'_y]}} \frac{dt}{g'_y(x,y)t^2+1}$$

Faisons décroître indéfiniment la constante λ que nous supposons positive et on aura la valeur cherchée :

$$\Phi(\xi + i\lambda) - \Phi(\xi - i\lambda) = 2i\pi \int \frac{f(x,y)\,dx}{[g'_y(x,y)]}$$

l'intégrale simple s'étendant à la partie de la courbe :

$$g(x,y) = \xi$$

qui est comprise dans l'aire A.

Soit par exemple :

$$\Phi(z) = \int_0^1\int_0^1 \frac{f(x,y)\,dx\,dy}{1-xyz},$$

$$= \int_0^1\int_0^1 \frac{\frac{f(x,y)}{xy}\,dx\,dy}{\frac{1}{xy} - z}$$

On aura :

$$g'_y(x,y) = -\frac{1}{xy^2}, \qquad \text{et} \qquad [g'_y(x,y)] = \frac{1}{xy^2};$$

nous trouvons par suite :

$$\Phi(\xi + i\lambda) - \Phi(\xi - i\lambda) = 2i\pi \int_{\frac{1}{\xi}}^{1} f(x,y)\,y\,dx,$$

où il faut remplacer y par $\frac{1}{\xi x}$, et supposer ξ positif et supérieur à l'unité pour que l'hyperbole traverse l'aire d'intégration. Nous ferons plus tard l'application de cette formule à une question importante de la théorie des fonctions elliptiques.

La considération des intégrales définies simples, et celle des intégrales doubles qui ont été le sujet des recherches de Laguerre nous a ainsi conduit par une voie élémentaire à la notion des fonctions ayant des lignes entières de discontinuité. M. Weierstrass a fait voir qu'on peut arriver à cette notion analytique, sans recourir au calcul intégral ; il a donné le premier exemple de suites infinies composées avec des expressions rationnelles et représentant des fonctions qui admettent de véritables coupures (Comptes-rendus de l'Academie des Sciences de Berlin, 1880). Ces résultats, dûs au grand géomètre, ont été obtenus d'une manière plus élémentaire et plus facile par M. Tannery, au moyen de la suite.

$$\frac{1+x^2}{1-x^2} + \frac{2x^2}{x^4-1} + \frac{2x^4}{x^8-1} + \frac{2x^8}{x^{16}-1} + \cdots$$

dont la somme se trouve comme il suit : Ajoutons membre à membre les identités :

$$\frac{1+x^2}{1-x^2}+\frac{2x^2}{x^4-1}=\frac{1+x^4}{1-x^4},$$

$$\frac{1+x^4}{1-x^4}+\frac{2x^4}{x^8-1}=\frac{1+x^8}{1-x^8},$$

. . . .

$$\frac{1+x^{2^n}}{1-x^{2^n}}+\frac{2x^{2^n}}{x^{2^{n+1}}-1}=\frac{1+x^{2^{n+1}}}{1-x^{2^{n+1}}};$$

on obtient ainsi :

$$\frac{1+x^2}{1-x^2}+\frac{2x^2}{x^4-1}+\frac{2x^4}{x^8-1}+\dots+\frac{2x^{2^n}}{x^{2^n}-1}=\frac{1+x^{2^{n+1}}}{1-x^{2^{n+1}}}$$

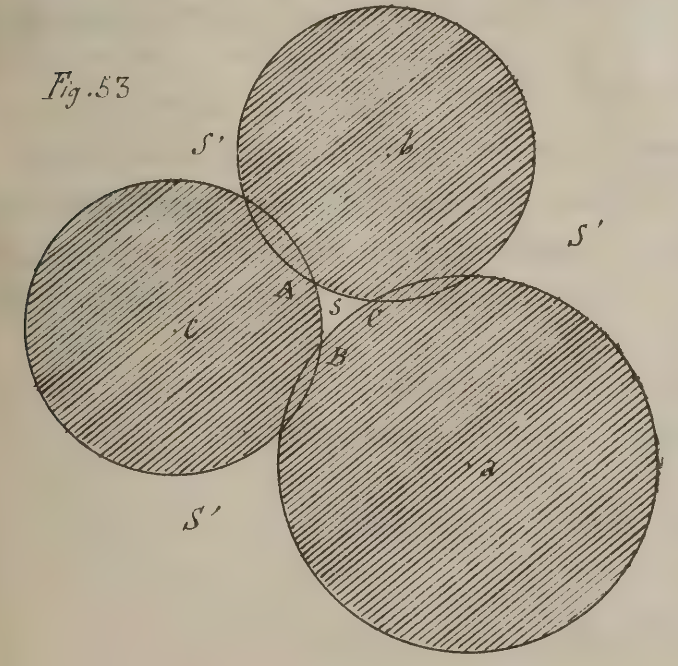
De là résulte que n croissant au-delà de toute limite, la somme de la série considérée est l'unité pour $x < 1$ et -1, pour x ou son module > 1.

La fonction représentée par la série admet donc la circonférence de rayon 1, dont le centre est à l'origine pour coupure.

Voici maintenant, dans le même ordre d'idées, des résultats beaucoup plus généraux et d'un grand intérêt, qui ont été obtenus par M. Appell et dont l'éminent analyste a bien voulu faire à ma demande l'exposé qu'on va lire :

Développements en Série dans des aires limitées par des arcs de cercle.

La méthode suivie pour établir les séries de Taylor et de Laurent peut être étendue au développement en série d'une fonction holomorphe dans une aire limitée par des arcs de cercle qui se coupent. Les développements ainsi obtenus présentent certaines propriétés dont les premiers exemples, tirés de la théorie des fonctions elliptiques, ont été donnés par Weierstrass.



Soit un triangle curviligne ABC dont les côtés sont formés par des arcs de cercle tournant leur convexité vers l'intérieur du triangle. Décrivons en entier les cercles auxquels appartiennent les arcs BC, CA, AB et soient respectivement a, b, c les affixes des centres de ces cercles. L'espace situé à l'extérieur de ces trois cercles se compose de deux parties.

1° l'aire S du triangle curviligne ABC ;

2° une aire indéfinie S'.

Cela posé, désignons par $f(z)$ une fonction holomorphe dans l'aire S du triangle ABC, par x l'affixe d'un

point extérieur à la fois aux trois cercles et envisageons l'intégrale :

$$I = \int_{BCA} \frac{f(z)\,dz}{z-x}$$

étendue au contour du triangle. Si le point x est situé dans l'aire S, l'intégrale I est égale à

$$2i\pi f(x)$$

si le point x est situé dans l'aire S', cette intégrale est nulle. En partageant l'intégrale I en trois parties relatives aux trois cotés du triangle curviligne, on aura :

$$I = \int_{BC} \frac{f(z)\,dz}{z-x} + \int_{CA} \frac{f(x)\,dz}{z-x} + \int_{AB} \frac{f(z)\,dz}{z-x}.$$

Dans la première de ces égalités, remplaçons $\frac{1}{z-x}$ par l'expression identique :

$$\frac{1}{(z-a)-(x-a)} = -\frac{1}{x-a} - \frac{z-a}{(x-a)^2} - \cdots - \frac{(z-a)^{n-1}}{(x-a)^n}$$

$$+ \left(\frac{z-a}{x-a}\right)^n \frac{1}{z-x};$$

nous aurons, pour cette intégrale, une expression de la forme :

$$\int_{BC} \frac{f(z)}{z-x}\,dz = \frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \cdots + \frac{A_n}{(x-a)^n} + R_n,$$

où les coefficients $A_1, A_2 \ldots$ sont donnés par les formules :

$$A_1 = -\int_{BC} f(z)\,dz, \qquad A_2 = -\int_{BC} (z-a) f(z)\,dz, \ldots$$

$$A_n = -\int_{BC} (z-a)^{n-1} f(z)\,dz,$$

ou le reste R_n par

$$R_n = \int_{BC} \left(\frac{z-a}{x-a}\right)^n \frac{f_1(z)}{z-x}\,dz,$$

les intégrales étant prises le long de l'arc BC. D'après la formule de M. Darboux, on a :

$$R_n = \lambda.\ \text{arc}\ BC. \left(\frac{\rho-a}{x-a}\right)^n \cdot \frac{f(\rho)}{\rho-x},$$

ρ désignant un point de l'arc BC ; quand n augmente indéfiniment, ce reste tend vers zero, car le rapport $\frac{\rho-a}{x-a}$ a un module inférieur à l'unité, le point d'affixe x étant par hypothèse situé en dehors du cercle auquel appartient l'arc BC. L'on a donc pour toutes les valeurs de x correspondant à des points de l'aire S ou de l'aire indéfinie

$$\int_{BC} \frac{f(z)}{z-x}\,dz = \frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \cdots + \frac{A_n}{(x-a)^n} + \cdots\cdots$$

Par un raisonnement identique on aura, pour ces mêmes valeurs de x ;

$$\int_{CA} \frac{f(z)}{z-x}\,dz = \frac{B_1}{x-b} + \frac{B_2}{(x-b)^2} + \cdots\cdots + \frac{B_n}{(x-b)^n} + \cdots$$

$$\int_{AB} \frac{f(z)}{z-x}\,dz = \frac{C_1}{x-c} + \frac{C_2}{(x-c)^2} + \cdots\cdots + \frac{C_n}{(x-c)^n} + \cdots$$

avec :

$$B_n = -\int_{CA} (z-b)^{n-1} f(z)\,dz, \qquad C_n = -\int_{AB} (z-c)^{n-1} f(z)\,dz.$$

Donc enfin en remplaçant dans I, les trois intégrales ci-dessus par les séries correspondantes

$$I = \sum_{n=1}^{n=\infty} \left[\frac{A_n}{(x-a)^n} + \frac{B}{(x-b)^n} + \frac{C_n}{(x-c)^n} \right]$$

développement valable en tous les points des aires S et S'. Si le point x est situé dans l'aire S du triangle curviligne ABC, l'intégrale I et, par suite, la somme de la série sont égales à $2i\pi f(x)$; si le point x appartient à l'aire indéfinie S', l'intégrale I est nulle ainsi que la somme de la série.

En divisant par $2i\pi$, on aura une série de fractions rationnelles.

$$\frac{1}{2i\pi} \sum_{n=1}^{n=\infty} \left[\frac{A_n}{(x-a)^n} + \frac{B_n}{(x-b)^n} + \frac{C_n}{(x-c)^n} \right]$$

convergente dans les aires S et S' : la somme de cette série est égale à $f(x)$ dans l'aire S et à zéro dans l'aire S'.

Exemple. — Supposons $f(x) = 1$ et appelons α, β, γ les affixes des points A, B, C. Alors :

$$A_n = -\int_{\beta}^{\gamma} (z-a)^{n-1} dz = \frac{(\beta-a)^n - (\gamma-a)^n}{n},$$

$$B_n = -\int_{\gamma}^{\alpha} (z-b)^{n-1} dz = \frac{(\gamma-b)^n - (\alpha-b)^n}{n},$$

$$C_n = -\int_{\alpha}^{\beta} (z-c)^{n-1} dz = \frac{(\alpha-c)^n - (\beta-c)^n}{n};$$

donc la série :

$$\frac{1}{2i\pi} \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{n} \left[\frac{(\beta-a)^n - (\gamma-a)^n}{(x-a)^n} + \frac{(\gamma-b)^n - (\alpha-b)^n}{(x-b)^n} + \frac{(\alpha-c)^n - (\beta-c)^n}{(x-c)^n} \right]$$

est convergente dans les aires S et S' et a pour somme 1 dans S, zéro dans S'. C'est ce qu'il serait aisé de vérifier en sommant la série à l'aide de la formule :

$$-\log(1-u) = u + \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} + \ldots\ldots + \frac{u^n}{n} + \ldots\ldots,$$

dans laquelle on ferait successivement :

$$u = \frac{\beta-a}{x-a}, \qquad u = \frac{\gamma-a}{x-a}, \qquad u = \frac{\gamma-b}{x-b}, \text{ etc} \ldots$$

Remarque. — La série obtenue dans le cas général :

$$\frac{1}{2\pi i} \sum_{n=1}^{n=\infty} \left[\frac{A_n}{(x-a)^n} + \frac{B_n}{(x-b)^n} + \frac{C_n}{(x-c)^n} \right]$$

est convergente dans les aires S et S' et a pour somme $f(x)$ dans l'aire S, zéro dans S'. Il existe une infinité d'autres séries de même forme possédant les mêmes propriétés. En effet, on a pour tous les points x, situés hors du cercle auquel appartient l'arc CB :

$$\frac{1}{x-\gamma} = \frac{1}{x-a} \cdot \frac{1}{1-\frac{\gamma-a}{x-a}} = \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{(\gamma-a)^{n-1}}{(x-a)^n}$$

et, pour tous les points situés hors du cercle auquel appartient l'arc AC :

$$\frac{1}{x-y} = \frac{1}{x-b} \cdot \frac{1}{1-\frac{y-b}{x-b}} = \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{(y-b)^{n-1}}{(x-b)^n};$$

donc, pour tous les points x situés hors de ces deux cercles, la série :

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{n=\infty} \left[\frac{(y-a)^{n-1}}{(x-a)^n} - \frac{(y-b)^{n-1}}{(x-b)^n} \right]$$

est convergente et a pour somme zéro. Il en serait de même des séries obtenues en prenant les dérivées des différents ordres de la série $\varphi(x)$ par rapport à x, séries que nous appellerons :

$$\varphi'(x), \qquad \varphi''(x) \ldots\ldots \varphi^{(k)}(x)$$

et par suite de la série

$$\lambda_0 \varphi(x) + \lambda_1 \varphi'(x) + \lambda_2 \varphi''(x) + \cdots\cdots + \lambda_k \varphi^{(k)}(x).$$

L'on pourra donc ajouter ce dernier développement à la série :

$$\frac{1}{2\pi i} \sum \left[\frac{A_n}{(x-a)^n} + \frac{B_n}{(x-b)^n} + \frac{C_n}{(x-c)^n} \right]$$

sans changer ni sa somme, ni ses régions de convergence.

Des considérations analogues s'appliquent à des aires limitées par des polygones curvilignes formés d'arcs de cercle tournant leur convexité vers l'intérieur de l'aire.

Nous terminerons l'étude des discontinuités dans les fonctions uniformes, en donnant, d'après Mr Poincaré, l'exemple bien remarquable d'une fonction définie dans tout le plan, à l'exception d'une certaine région.

Multiplions membre à membre les équations suivantes, où les modules des variables sont supposés moindres que l'unité, à savoir :

$$\frac{1}{1-x} = \sum x^n$$

$$\frac{1}{1-y} = \sum y^n$$

$$\frac{1}{1-z} = \sum z^p,$$

on en conclut que la série triple $\sum x^m y^n z^p$, où les exposants m, n, p parcourent la suite des nombres entiers à partir de zéro, est convergente, sa valeur étant :

$$\frac{1}{(1-x)(1-y)(1-z)}$$

Cela posé, envisageons l'expression :

$$\sum \frac{x^m y^n z^p}{\frac{ma+nb+pc}{m+n+p}}$$

où a, c, c sont des quantités imaginaires quelconques, qui seront considérées comme les affixes de trois points A, B, C. Cela étant, je supposerai appliquées en ces points trois forces parallèles et de même sens, proportionnelles aux nombres entiers m, n, p.

La quantité $\frac{ma+nb+pc}{m+n+p}$ sera l'affixe du point d'application de leur résultante et l'on peut admettre par suite que m, n, p soient pris de telle sorte que $\frac{ma+nb+pc}{m+n+p}$ représente avec une approximation aussi grande qu'on le veut un point quelconque de l'intérieur du triangle ABC. Si donc ξ est l'affixe d'un point situé à l'intérieur de ABC, la série considérée est divergente, puisqu'elle renferme un nombre infini de termes supérieurs à toute limite, et ne peut définir une fonction. Elle a au contraire une valeur parfaitement déterminée lorsque ξ est l'affixe d'un point à l'intérieur de ABC ; de sorte que l'on peut dire que cette série définit une fonction présentant le triangle ABC comme espace lacunaire.

Nous avons choisi l'exemple le plus simple ; on formerait de la même manière des fonctions admettant un polygone donné comme espace lacunaire, nous renverrons au beau travail que Mr. Poincaré a publié dans "Acta Societatis Fennicæ", sous le titre : Sur les fonctions à espaces lacunaires (T. XIII, 1881), et qui contient sur ce sujet des vues nouvelles et du plus grand intérêt.

18ème Leçon.

Nous sommes parvenu au terme de l'étude succincte que nous avons voulu faire de cette partie de la théorie générale des fonctions qui concerne les fonctions uniformes. Avant d'aborder, et en quelques points seulement, les recherches relatives aux fonctions d'une autre nature, nous nous arrêterons à une question importante, où nous aurons à exposer l'une des plus belles découvertes de Cauchy, nous voulons parler de la résolution par des intégrales définies des équations $G(z)=0$, dont le premier membre est une fonction holomorphe de l'inconnue.

Voici en premier lieu une remarque qui résulte des propositions précédemment établies à l'égard de ces fonctions.

Soit a une racine d'ordre m de multiplicité, on aura :

$$G(z) = (z-a)^m H(z)$$

$H(z)$ ne s'annulant plus pour $z=a$. De cette égalité on tire :

$$\frac{G'(z)}{G(z)} = \frac{m}{z-a} + \frac{H'(z)}{H(z)}$$

par conséquent le résidu de la fonction $\frac{G'(z)}{G(z)}$, correspondant au pôle $z=a$, est égal au nombre entier et positif m, qui indique l'ordre de multiplicité de la racine a,

Si donc on envisage l'intégrale $\int_S \frac{G'(z)}{G(z)} dz$, le théorème général de Cauchy nous montre qu'elle aura pour valeur $2i\pi\mu$, μ désignant le nombre des racines de l'équation $G(z)=0$ comprises à l'intérieur du contour S, en tenant compte de l'ordre de multiplicité de chacune d'elles.

On voit par là qu'il sera toujours possible de calculer le nombre des racines d'une équation comprises à l'intérieur d'un contour donné quelconque. La solution de cette question se trouve ramenée en effet à la détermination numérique d'une intégrale définie qu'il suffit même d'obtenir à moins d'une unité, pour en avoir la valeur exacte.

A cette première proposition nous ajouterons la suivante :

Soit $F(z)$ une fonction finie, continue et uniforme à l'intérieur du contour S, l'intégrale

$$\int_{(S)} \frac{F(z)\, G'(z)}{G(z)} dz$$

d'après le théorème de Cauchy, a pour valeur le produit de $2i\pi$ par la somme des résidus de la fonction $\frac{F(z)G'(z)}{G(z)}$ relatifs aux racines de $G(z)$ comprises à l'intérieur de S. Si a est une telle racine, de multiplicité égale à m, le résidu correspondant sera évidemment $mF(a)$. Par suite, l'intégrale précédente est égale au produit de $2i\pi$ par la somme des valeurs de $F(z)$ qui correspondent aux racines de $G(z)=0$ comprises à l'intérieur du Contour S, en tenant compte de leur ordre de multiplicité.

Il résulte de là qu'ayant déterminé un contour S à l'intérieur duquel il n'y ait qu'une seule racine $z=a$, une fonction quelconque $F(a)$ de cette racine est donnée par la formule :

$$F(a) = \frac{1}{2i\pi} \int_{(S} \frac{F(z)\, G'(z)}{G(z)} dz,$$

et peut être obtenue par conséquent avec autant d'approximation que l'on veut.

Nous allons donner un exemple de ce calcul approximatif, en considérant l'intégrale qui exprime le nombre μ des racines comprises à l'intérieur d'un cercle de rayon R, ayant pour centre l'origine, et supposant que $G(z)$ soit un polynôme entier. Nous poserons à cet effet $z=Re^{it}$, de sorte qu'en faisant :

$$J = \int_{(S)} \frac{G'(z)}{G(z)} dz$$

on aura :

$$J = \int_0^{2\pi} \frac{G'(z)}{G(z)}\, iRe^{it} dt = i \int_0^{2\pi} \frac{z\, G'(z).dt}{G(z)}.$$

et par suite :

$$\mu = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{z\, G'(z)}{G(z)} dt.$$

Pour calculer l'intégrale, faisons usage de la formule approchée :

$$\int_0^{2\pi} f(t)\,dt = \frac{2\pi}{n}\left[f(0)+f\left(\frac{\pi}{n}\right)+f\left(\frac{2\pi}{n}\right)+\dots+f\left(\frac{2(n-1)\pi}{n}\right)\right]$$

et soit $\theta = e^{\frac{2i\pi}{n}}$ une racine primitive de l'équation $\theta^n-1=0$; cette expression donnera alors avec d'autant plus d'approximation que n sera plus grand :

$$\mu = \frac{1}{n}\sum\frac{zG'(z)}{G(z)},$$

les divers termes de la somme se rapportent aux valeurs.

$$z = R,\ R\theta, R\theta^2, R\theta^3, \dots R\theta^{n-1}.$$

Allons plus loin, et employons la formule :

$$\frac{n}{x^n-1}=\sum\frac{\theta^m}{x-\theta^m},$$

$$(m = 0,1,2,3,\dots n-1)$$

où figurent dans le second membre les diverses racines de l'équation $\theta^n-1=0$. Soient ensuite $a, b, c, \dots k, l$ les racines de l'équation $G(z)=0$, et en faisant $x=\frac{a}{R}$, on aura :

$$\frac{n}{1-\left(\frac{a}{R}\right)^n} = \sum\frac{\theta^m}{\theta^m-\frac{a}{R}}=\sum\frac{R\theta^m}{R\theta^m-a},$$

la sommation étant effectuée par rapport aux diverses valeurs de l'exposant m.

Cela étant, il suffit d'employer la relation.

$$\frac{zG'(z)}{G(z)} = \sum\frac{z}{z-a};$$

pour parvenir à cette expression du nombre μ, à savoir :

$$\mu = \sum\frac{1}{1-\left(\frac{a}{R}\right)^n}.$$

On remarquera qu'elle met immédiatement en évidence la propriété de représenter approximativement le nombre des racines $a, b, \dots$ dont le module est $< R$. En effet, pour n très grand les termes $\frac{1}{1-\left(\frac{a}{R}\right)^n}$ sont sensiblement 0 ou 1, suivant qu'on aura :

$$\text{mod } a > R, \text{ ou bien : mod. } a < R.$$

Ajoutons qu'en formant l'équation $\Pi(x)=0$ aux puissances n^{es} des racines de l'équation : $G(z)=0$, ce qui donnera :

$$\frac{z\Pi'(z)}{\Pi(z)} = \sum\frac{z}{z-a^n} = \sum\frac{1}{1-\frac{a^n}{z}},$$

on en conclut, en faisant $z=R^n$, la relation

$$\frac{z\Pi'(z)}{\Pi(z)} = \sum\frac{1}{1-\left(\frac{a}{R}\right)^n};$$

nous avons donc :

$$\mu = \frac{z\Pi'(z)}{\Pi(z)} \text{ pour } z=R^n.$$

On peut ainsi calculer μ par cette formule, avec telle approximation qu'on le veut en prenant n suffisamment grand.

Revenons aux considérations générales en nous proposant de faire usage de la formule :

$$\mu = \frac{1}{2i\pi}\int_{(S)} \frac{G'(z)}{G(z)}\, dz.$$

qui donne le nombre des racines de l'équation $G(z)=0$ contenues à l'intérieur du contour fermé quelconque S.

$$\mu = \frac{1}{2i\pi}\int_{(S)} \frac{G'(z)}{G(z)}\, dz$$

Pour calculer une semblable intégrale, nous savons qu'il faut poser $z=\varphi(t)+i\psi(t)$, φ et ψ étant deux fonctions réelles de la variable réelle t, telles que les équations : $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$ représentent le contour S. Mais il n'est pas nécessaire que ce contour soit donné dans toute son étendue par les mêmes fonctions φ et ψ; et l'on peut supposer qu'il soit composé de plusieurs chemins partiels, tels que pour chacun d'eux seulement les fonctions φ et ψ restent les mêmes.

Fig. 55

Soient alors AB, BC, ... ces divers chemins, on employera la relation.

$$\int_{(S)} \frac{G'(z)}{G(z)}dz = \int_{(AB)} \frac{G'(z)}{G(z)}dz + \int_{(BC)} \frac{G'(z)}{G(z)}dz + \dots$$

nous admetterons comme condition essentielle que dans chacune des intégrales du second membre les fonctions φ et ψ soient uniformes

Introduisons donc cette variable t et supposons qu'on décrive le contour S en entier et une seule fois dans le sens direct en partant du point A avec la valeur initiale $t=a$ pour revenir à ce même point avec la valeur $t=b$. Si l'on pose $G(z) = P+iQ$, on pourra écrire :

$$\frac{G'(z)}{G(z)}dz = d[\log(G(z)] = \frac{dP+i\,dQ}{P+iQ}$$

et nous obtenons alors

$$\mu = \frac{1}{2i\pi}\int \frac{P\,dP+Q\,dQ}{P^2+Q^2} + \frac{1}{2\pi}\int \frac{P\,dQ-Q\,dP}{P^2+Q^2},$$

puis, en faisant : $P+iQ=Re^{i\lambda}$,
$$\mu = \frac{1}{2i\pi}\int_{(S)} d(\log R) + \frac{1}{2\pi}\int_{(S)} d\lambda,$$

Or μ étant réel, le premier terme doit disparaître ; on le vérifie aisément, car $\log R$ est pris dans le sens arithmétique ; ses valeurs aux limites $t=a$ et $t=b$ sont les mêmes, et l'intégrale $\int_{(S)} d\log R$ est nulle. Il vient donc simplement :

$$\mu = \frac{1}{2\pi}\int_{(S)} d\lambda;$$

on en conclut que λ_0 et λ désignant les valeurs initiale et finale de l'argument de $G(z)$ on a la relation : $\lambda_1-\lambda_0 = 2\mu\pi$.

Nous retrouvons ainsi par la voie du Calcul Intégral une proposition

déjà démontrée au moyen de considérations élémentaires, dans le cas où $G(z)$ est un polynôme, savoir: La variation de l'argument d'une fonction holomorphe en suivant le contour d'une aire parcourue dans le sens positif, est égale au produit de 2π par le nombre des racines comprises dans cette aire.

Cauchy ne s'est pas contenté de ce résultat; nous allons montrer en suivant la méthode même du grand géomètre, qu'on peut arriver à déterminer le nombre μ dans le cas des équations algébriques, à l'aide d'opérations en tout semblables à celles que demande l'application du théorème de Sturm, quand les coordonnées du contour sont des fonctions rationnelles de la variable t.

Reprenons, à cet effet, l'expression de $G(z)$ sous la forme $P+iQ$, et rappelons que l'argument λ est défini par la relation: $\operatorname{tg}\lambda = \frac{Q}{P}$ où P et Q sont des fonctions de t complètement déterminées lorsqu'on donne les quantités $\varphi(t)$ et $\psi(t)$ qui définissent le contour S ou ses diverses parties.

Nous poserons $\frac{Q}{P} = f(t)$ d'où $\lambda = \int_a^b \frac{f'(t)\,dt}{1+f^2(t)}$

et c'est l'étude de cette intégrale qui nous conduira au théorème mémorable découvert par Cauchy.

Remarquons, en premier lieu, que l'intégrale indéfinie $\int \frac{f'(t)\,dt}{1+f^2(t)}$ est explicitement connue au moyen de la formule $\operatorname{arc\,tg} f(t) + C$, les déterminations multiples de $\operatorname{arc\,tg} f(t)$ ne faisant que modifier la valeur de la constante arbitraire. Mais en passant à l'intégrale définie $\int_a^b \frac{f(t)\,dt}{1+f^2(t)}$, représentée par $\operatorname{arc\,tg} f(b) - \operatorname{arc\,tg} f(a)$, si l'on choisit par $\operatorname{arc\,tg} f(a)$ une de ses déterminations, il faut savoir quelle détermination correspondante prendre de $\operatorname{arc\,tg}(b)$, et c'est en ce point que consiste la difficulté de la question.

Dans la suite, étant donnée une valeur réelle x, nous représenterons par $\operatorname{arc\,tg} x$ celui des arcs en nombre infini admettant x pour tangente, qui est compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$, c'est-à-dire le plus petit en valeur absolue; quand x variera d'une manière continue de $-\infty$ à $+\infty$, $\operatorname{arc\,tg} x$ variera donc aussi d'une manière continue de $-\frac{\pi}{2}$ à $\frac{\pi}{2}$.

Ceci posé, on voit que l'expression de l'intégrale $\int_a^b \frac{f'(t)\,dt}{1+f^2(t)}$ se présente sous la forme:

$$\operatorname{arc\,tg} f(b) - \operatorname{arc\,tg} f(a) + n\pi,$$

de sorte que la question proposée est ramenée à la détermination du nombre entier n. Considérons à cet effet la quantité

$$J = \int_a^t \frac{f'(t)\,dt}{1+f^2(t)};$$

j'établirai d'abord qu'elle est une fonction continue de t, en admettant que $f(t)$ s'exprime par le quotient de deux fonctions holomorphes $\frac{H(t)}{G(t)}$.

Changeons, en effet, t en $t+h$, et soit J' la nouvelle valeur de

l'intégrale considérée, on aura :

$$J' - J = \int_t^{t+h} \frac{f'(t)\,dt}{1+f^2(t)} = h\,\frac{f'(\theta)}{1+f^2(\theta)},$$

θ désignant une quantité comprise entre t et $t+h$: sous les conditions admises, on voit alors immédiatement que $\frac{f'(\theta)}{1+f^2(\theta)}$ est une quantité finie, quelle que soit la valeur de t; en effet, on peut écrire cette expression sous la forme :

$$\frac{H'(\theta)\,G(\theta) - H(\theta)\,G'(\theta)}{G^2(\theta) + H^2(\theta)};$$

et si cette quantité devenait infinie $G(\theta)$ et $H(\theta)$ seraient nuls en même temps, ce qui est impossible, car la fraction $\frac{H(t)}{G(t)}$ peut être supposée réduite à sa plus simple expression

Ce point établi, reprenons l'expression de

$$J = \int_a^t \frac{f'(t)\,dt}{1+f^2(t)}$$

par la formule :

$$\operatorname{arc\,tg} f(t) - \operatorname{arc\,tg} f(a) + n\pi.$$

Pour $t = a$, on a : $J = 0$ et par suite $n = 0$; cela étant, lorsque t croît à partir de a par degrés insensibles, n reste nécessairement nul, en supposant arc $\operatorname{tg} f(t)$ fonction continue de t, c'est-à-dire tant que $f(t)$ reste fini.

Supposons que pour $t = k$, $f(t)$ devenant infini soit positif quand t est $< k$ et négatif quand t est $> k$.

Nous pourrons représenter la succession des valeurs de arc $\operatorname{tg} f(k-\varepsilon)$ quand l'infiniment petit positif ε tend vers zéro, par la série des quantités :

$$\frac{\pi}{2} - \alpha_1,\ \frac{\pi}{2} - \alpha_2, \ldots\ldots \frac{\pi}{2},$$

où $\alpha_1, \alpha_2, \ldots\ldots$ vont en décroissant jusqu'à zéro. La série des valeurs de arc $\operatorname{tg} f(k+\varepsilon)$, en faisant croître ε à partir de zéro, sera de même :

$$-\frac{\pi}{2},\ -\left(\frac{\pi}{2} - \beta_1\right),\ -\left(\frac{\pi}{2} - \beta_2\right), \ldots\ldots$$

les termes $\beta_1, \beta_2, \ldots\ldots$ allant en augmentant ; de sorte que, quand t varie d'une manière continue de $k-\varepsilon$ à $k+\varepsilon$, nous avons pour $f(t)$ la série suivante de valeurs :

$$\left(\frac{\pi}{2} - \alpha_1\right),\ \left(\frac{\pi}{2} - \alpha_2\right), \ldots\ldots \frac{\pi}{2},\ -\frac{\pi}{2} \ldots -\left(\frac{\pi}{2} - \beta_1\right), -\left(\frac{\pi}{2} - \beta_2\right), \ldots$$

dont la discontinuité est manifeste.

Mais on voit qu'il suffit d'ajouter π aux termes de la seconde suite pour obtenir un ensemble de valeurs continues, en la réunissant à la première. Nous devons par conséquent, pour former l'expression de J, faire $n = 1$, à partir de la valeur $t = k$, et cette expression subsistera jusqu'à ce que $f(t)$ devienne infini de nouveau.

Continuons de faire croître t ; le même raisonnement montre que n doit être augmenté d'une unité, toutes les fois que $f(t)$, en devenant infinie passe du positif au négatif. On voit pareillement qu'il faut le diminuer d'une unité, si la fonction passe du négatif au positif, tandis que n ne change pas, lorsqu'il n'y a point de changement de signe.

L'expression de l'intégrale $J = \int_a^b \frac{f'(t)\,dt}{1+f^2(t)}$ est donc $J = \operatorname{arc\,tg} f(b) - \operatorname{arc\,tg} f(a) + n\pi$, n désignant l'excès du nombre de fois que $f(t)$ devient infinie en passant du positif au négatif, sur le nombre de fois que $f(t)$ devient infinie en passant du négatif au positif, lorsque la variable croît de $t=a$ à $t=b$. Le nombre n est ce que Cauchy a appelé l'indice de la fonction $f(t)$ entre les limites a et b.

Considérons ensuite un second intervalle correspondant à une nouvelle portion du chemin décrit par la variable z, dans lequel $f(t)$ soit remplacé par une autre fonction uniforme $f_1(t)$, et supposons qu'alors t croisse de $t=a'$ à $t=b'$. Les deux chemins se suivent sans interruption, on a donc la condition :

$$f(b) = f_1(a')\,;$$

Cela étant nommons J' l'intégrale relative à $f_1(t)$, n' l'indice correspondant ; en ajoutant membre à membre les relations :

$$J' = \operatorname{arc\,tg} f_1(b') - \operatorname{arc\,tg} f_1(a') + n'\pi$$
$$J = \operatorname{arc\,tg} f(b) - \operatorname{arc\,tg} f(a) + n\pi$$

on obtiendra :

$$J + J' = \operatorname{arc\,tg} f_1(b') - \operatorname{arc\,tg} f(a) + (n+n')\pi.$$

Or, on voit que dans cette égalité, $J+J'$ étant l'intégrale que nous considérons à l'égard du chemin composé de deux parties, la somme $n+n'$ représente encore en suivant ce chemin, l'excès du nombre de fois que le quotient $\frac{Q}{P}$ devient infini en passant du positif au négatif, sur le nombre de fois qu'il devient infini en passant du négatif au positif. Continuons ainsi de proche en proche, jusqu'à revenir au point de départ, en décrivant un contour fermé. Soit ν l'indice de $\frac{Q}{P}$, J l'intégrale pour tout ce contour, en observant que les arcs tangentes donnent une différence nulle, comme ayant la même valeur au départ et à l'arrivée, on obtient la relation :

$$J = \nu\pi,$$

et si l'on rapproche ce résultat de la valeur $J = 2\mu\pi$, nous obtenons pour le nombre des racines de l'équation $G(z) = 0$, qui sont comprises à l'intérieur du contour, l'expression découverte par Cauchy.

$$\mu = \frac{\nu}{2}$$

Nous appliquerons immédiatement ce résultat

aux équations algébriques en prenant :

$$G(z) = z^n + A z^{n-1} + B z^{n-2} + \dots$$

et nous choisirons pour contour une circonférence ayant son centre à l'origine qui sera donné par la relation

$$z = R\,(\cos t + i \sin t)$$

en faisant croître t de zéro à 2π. Soit encore, afin de mettre $G(z)$ sous la forme $P + iQ$:

$$A = a + i a',\ B = b + i b',\ \text{etc}$$

on aura ainsi :

$$P = R^n \cos nt + R^{n-1}[a \cos (n-1) t - a' \sin (n-1) t] + \dots$$
$$Q = R^n \sin nt + R^{n-1}[a \sin (n-1) t - a' \cos (n-1) t] + \dots$$

Cela étant nous observerons que ces valeurs donnent pour R infini, $\frac{Q}{P} = \frac{\sin nt}{\cos nt}$ de sorte que le nombre total des racines sera l'indice de cette quantité, lorsqu'on fait varier t de zéro à 2π. Le dénominateur s'annule pour

$$t = \frac{(2k+1)\pi}{2n}$$

où il faut prendre $K = 0, 1, 2, \dots 2n-1$, et comme les résidus correspondants ont tous pour valeur $-\frac{1}{n}$, les $2n$ passages par l'infini se font toujours du positif au négatif ; on a donc $\nu = 2n$, et par conséquent $\mu = n$.

Nous allons maintenant donner le procédé de calcul du grand géomètre pour déterminer l'indice, lorsque $f(t)$ est le quotient de deux polynômes, l'équation $G(z)=0$ étant algébrique. C'est ce qui arrivera lorsque les fonctions $\varphi(t)$ et $\psi(t)$ seront rationnelles, ces expressions pouvant d'ailleurs, comme nous l'avons dit, changer de forme, dans les diverses parties du contour. Il y a même des circonstances plus générales, dans lesquelles l'indice peut encore se calculer ; l'équation de Képler en donne un exemple intéressant, pour lequel nous renvoyons à un travail de M. Gourier (Annales de l'École Normale supérieure, 1878). Nous nous fonderons sur la remarque suivante, qui a lieu en général, quelle que soit la fonction $f(t)$.

Pour l'établir, je reprends la relation :

$$J = \int_a^b \frac{f'(t)\,dt}{1+f^2(t)} = \operatorname{arc\,tg} f(b) - \operatorname{arc\,tg} f(a) + n\pi ;$$

remplaçons $f(t)$ par $\frac{1}{f(t)}$, et désignant alors par J' la valeur de l'intégrale, et par n' l'indice correspondant ; on aura l'égalité :

$$J' = -\int_a^b \frac{f'(t)\,dt}{1+f^2(t)} = \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{f(b)} - \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{f(a)} + n'\pi .$$

En l'ajoutant membre à membre avec la précédente, on en conclut :

$$(n+n')\pi = \operatorname{arc\,tg} f(a) + \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{f(a)} - \operatorname{arc\,tg} f(b) - \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{f(b)} ;$$

or la somme arc tg x + arc tg $\frac{1}{x}$ a pour valeur $\frac{\pi}{2}$ ou $-\frac{\pi}{2}$ selon que x est positif ou négatif. Nous parvenons ainsi à la relation $n + n' = \varepsilon$, où ε se détermine comme il suit :

$$\begin{array}{lll} \text{I.} & f(a)f(b) > 0, & \varepsilon = 0, \\ \text{II.} & f(a) > 0, f(b) < 0, & \varepsilon = 1, \\ \text{III.} & f(a) < 0, f(b) > 0, & \varepsilon = -1, \end{array}$$

Cette relation entre les indices n, n' des deux fonctions inverses $f(t)$, $\frac{1}{f(t)}$ pris entre les mêmes limites a et b, peut être établie par un procédé entièrement élémentaire.

Je me fonde sur cette remarque évidente, qu'en supposant :

$$f(t) = f_1(t) + f_2(t)$$

le signe d'une des fonctions $f_1(t)$, $f_2(t)$, dans le voisinage d'une valeur qui la rend infinie, donne le signe que prend alors le premier membre, sous la condition que l'autre fonction soit une quantité finie. Désignons l'indice d'une fonction quelconque $\varphi(t)$, pris entre les limites $t = a$, $t = b$, par la notion : $[\varphi(t)]$, nous aurons la relation :

$$[f(t)] = [f_1(t)] + [f_2(t)].$$

Soit en particulier :

$$f_1(t) = \frac{V_1}{V},$$

$$f_2(t) = \frac{V}{V_1},$$

en désignant par V et V_1 des polynômes ou bien des fonctions holomorphes n'ayant pas de facteurs communs. Nous obtenons alors

$$f(t) = \frac{V^2 + V_1^2}{VV_1};$$

ce qui permet d'écrire, le numérateur étant essentiellement positif :

$$[f(t)] = \left[\frac{1}{VV_1}\right]$$

et par conséquent :

$$\left[\frac{1}{VV_1}\right] = \left[\frac{V_1}{V}\right] + \left[\frac{V}{V_1}\right].$$

Admettons maintenant que VV_1 soit positif pour $t = a$ et négatif pour $t = b$, il est clair qu'en faisant croître t de $t = a$ à $t = b$ cette quantité aura passé une fois de plus du positif au négatif que du négatif au positif. On a donc entre les indices des deux fonctions réciproques les relations :

$$\left[\frac{V_1}{V}\right] + \left[\frac{V}{V_1}\right] = 1$$

Supposons ensuite que VV_1, ou ce qui revient au même, le quotient $\frac{V_1}{V}$, soit négatif pour $t = a$, positif pour $t = b$, et en dernier lieu ait le même signe aux deux limites, nous trouverons de même : $\left[\frac{V_1}{V}\right] + \left[\frac{V}{V_1}\right] = -1,$

puis :

$$\left[\frac{V_1}{V}\right]+\left[\frac{V}{V_1}\right]=c$$

Ceci établi, je reviens au cas où V et V_1 sont deux polynômes entiers sans diviseurs communs.

Je pose alors, en effectuant l'opération du plus grand commun diviseur, et changeant les signes des restes :

$$\begin{aligned} V &= V_1 Q_1 - V_2 \\ V_1 &= V_2 Q_2 - V_3 \\ &\dots\dots\dots\dots \\ V_{n-1} &= V_n Q_n - V_{n+1}. \end{aligned}$$

De la supposition faite résulte que l'un des restes V_n est une constante, et que V_{n+1} est nul.

Cela étant soit :

$$\left(\frac{V}{V_1}\right)+\left(\frac{V_1}{V}\right)=\varepsilon_1,$$

ε_1 ayant la valeur 0, 1, ou -1 qui s'obtient, comme nous l'avons vu, au moyen des signes que prend le rapport $\frac{V}{V_1}$ pour $t=a$ et $t=b$.

Nous aurons pareillement

$$\left(\frac{V_1}{V_2}\right)+\left(\frac{V_2}{V_1}\right)=\varepsilon_2$$

$$\vdots$$

$$\left(\frac{V_{n-1}}{V_n}\right)+\left(\frac{V_n}{V_{n-1}}\right)=\varepsilon_n$$

D'autre part l'égalité $V=V_1 Q_1-V_2$, montre que dans le voisinage d'une racine de l'équation $V_1=0$, les polynômes V et V_2 sont de signes contraires, il en est de même par conséquent des fractions $\frac{V}{V_1}$ et $\frac{V_2}{V_1}$, et l'on en conclut la relation :

$$\left(\frac{V}{V_1}\right)+\left(\frac{V_2}{V_1}\right)=0.$$

On a de même

$$\left(\frac{V_1}{V_2}\right)+\left(\frac{V_3}{V_2}\right)=0$$

$$\vdots$$

$$\left(\frac{V_{n-2}}{V_{n-1}}\right)+\left(\frac{V_n}{V_{n-1}}\right)=0$$

En ajoutant alors membre à membre les égalités de la première série, et tenant compte des relations précédentes, il vient simplement :

$$\left(\frac{V_1}{V}\right)+\left(\frac{V_{n-1}}{V_n}\right)=\varepsilon_1+\varepsilon_2+\dots\dots+\varepsilon_n;$$

or, V_n étant une constante, $\left(\frac{V_{n-1}}{V_n}\right)$ est nul, et nous obtenons la valeur cherchée de l'indice :

$$\frac{V_1}{V}=\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3+\dots\dots\varepsilon_n.$$

Dans le cas où le polynôme V, est la dérivée de V, le quotient $\frac{V'}{V}$ passe toujours, en devenant infini, du négatif au positif. L'indice, qui est alors négatif, donne en valeur absolue le nombre des racines réelles de l'équation $V = 0$, comprises entre les deux limites a et b. De là se conclut aisément le théorème de Sturm, sous la forme qu'on lui donne dans l'algèbre élémentaire.

Sous un point de vue plus général, quelque soit la fonction holomorphe V, on peut dire que l'indice changé de signe de $\frac{V'}{V}$, donne le nombre des racines réelles de l'équation $V = 0$, qui sont comprises entre deux limites quelconques a et b.

Soit donc
$$f(t) = \frac{V}{V}, \text{ d'où } \frac{f'(t)}{1+f^2(t)} = \frac{VV''-V'^2}{V+V'^2},$$
cet indice que je désigne par ν, étant déterminé par la relation :
$$\int_a^b \frac{VV''-V'^2}{V^2+V'^2}dt = \left(\operatorname{arc\,tg}\frac{V'}{V}\right)_{t=b} - \left(\operatorname{arctg}\frac{V'}{V}\right)_{t=a} + \nu\pi,$$
on en conclut l'expression par une intégrale définie et les deux arcs tangente du nombre de ces racines.

Soit par exemple :
$$V = Ae^{at} + Be^{bt} + \ldots\ldots + Le^{lt}.$$
$A, B, \ldots\ L$ étant des polynomes entiers en t, et $a, b, .\ l$ des constantes que je suppose rangées par ordre décroissant de grandeur. On aura en ne conservant que l'exponentielle de l'ordre le plus élevé :
$$VV''-V'^2 = (AA''-A'^2)e^{2at} + \ldots$$
$$V^2-V'^2 = (A^2+A'^2)e^{2at} + \ldots\ldots,$$
et il vient sensiblement, si l'on suppose t positif et très grand,
$$\frac{VV''-V'^2}{V^2+V'^2} = \frac{AA''-A'^2}{A^2+A'^2}$$

Cela étant il suffit d'observer que le numérateur est d'un degré inférieur au moins de deux unités au degré du dénominateur, pour en conclure que l'intégrale $\int_a^\infty \frac{VV''-V'^2}{V^2+V'^2}dt$ a une valeur finie.

En écrivant les termes de V dans l'ordre inverse,
$$V = Le^{lx} + \ldots + Be^{bx} + Ae^{ax},$$
on prouvera de même que l'intégrale est finie ; si l'on prend a négatif et infiniment grand ; il est donc établi que l'équation $V = 0$ n'a qu'un nombre limité de racines réelles ; et on pourrait aussi le démontrer d'une manière entièrement élémentaire au moyen du théorème de Rolle.

19ème Leçon.

La série de Lagrange a pour objet d'obtenir l'une des racines d'une équation de la forme suivante : $z - a - \alpha f(z) = 0$, qui est d'une grande généralité, la fonction $f(z)$ pouvant être quelconque, avec la condition de rester holomorphe dans une partie du plan.

Nous établirons en premier lieu qu'il existe un contour fermé comprenant à son intérieur une racine de cette équation que nous verrons être développable en série convergente ordonnée suivant les puissances croissantes de α ; et, dans ce but, nous démontrerons le lemme suivant :

Soit F et Φ, deux fonctions holomorphes ; les équations :

$$F = 0, \qquad F + \Phi = 0$$

ont le même nombre de racines comprises dans un contour fermé S, sous la condition que tout le long de ce contour on ait constamment : $\operatorname{mod} \frac{\Phi}{F} < 1$. Les nombres μ et μ_1 des racines de ces équations comprises à l'intérieur de S, sont exprimés par les formules :

$$\mu = \frac{1}{2i\pi} \int_{(S)} d\left[\log(F(z))\right];$$

$$\mu_1 = \frac{1}{2i\pi} \int_{(S)} d\left[\log\left(F(z) + \Phi(z)\right)\right].$$

Nous obtenons ainsi :

$$\mu_1 - \mu = \frac{1}{2i\pi} \int_{(S)} d\left[\log\left(1 + \frac{\Phi}{F}\right)\right],$$

et comme, par hypothèse, tout le long du contour d'intégration le module de $\frac{\Phi}{F}$ est moindre que l'unité, la valeur de $\log\left(1 + \frac{\Phi}{F}\right)$ est la même à l'arrivée et au départ, l'intégrale qui donne $\mu_1 - \mu$ est donc nulle et nous avons : $\mu_1 = \mu$.

Appliquons ceci à l'équation :

$$z - a - \alpha f(z) = 0;$$

supposons que a soit l'affixe d'un point situé à l'intérieur du contour S, et que α soit déterminé par la condition qu'on ait sur tous les points de ce contour :

$$\operatorname{mod} \frac{\alpha f(z)}{z - a} < 1.$$

Alors l'équation proposée a le même nombre de racines que l'équation $z - a = 0$, c'est à dire une seule ; c'est cette racine ainsi déterminée que nous allons développer en série convergente.

On trouve dans les travaux de Cauchy d'autres modes de spécification ; mais il en résulte de nombreuses difficultés qui ont donné lieu à un beau et savant mémoire de Félix Chio, inséré au tome XII des Savants étrangers.

Nous renverrons aussi sur ce sujet au travail du même auteur, intitulé: Troisième mémoire sur la série de Lagrange, dans les Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences de Turin (Tome VIII, Avril 1872) et à un article de Mr. Genocchi, inséré dans les Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences de Paris (29 Décembre 1873). La méthode que nous avons employée est exempte de ces difficultés; nous l'avons puisée dans un excellent mémoire de M. Rouché, sur la série de Lagrange (Journal de l'Ecole Polytechnique 39e Cahier).

Soit:

$$F(z) = z - a - \alpha f(z) = 0;$$

et ζ la racine unique dont l'existence a été établie à l'intérieur de S.

En désignant par $\Pi(z)$ une fonction holomorphe quelconque de z, le résidu de l'expression $\frac{\Pi(z)}{F(z)}$ relatif à la racine ζ du dénominateur, a pour valeur $\frac{\Pi(\zeta)}{F'(\zeta)}$, et l'on a par suite:

$$\frac{\Pi(\zeta)}{F'(\zeta)} = \frac{1}{2i\pi}\int_{(S)} \frac{\Pi(z)\,dz}{F(z)}.$$

Nous allons développer en série cette intégrale, en suivant la méthode dont nous avons déjà fait usage, pour établir la formule de Taylor.

A cet effet nous partirons de l'identité suivante:

$$\frac{1}{F(z)} = \frac{1}{z-a-\alpha f(z)} = \frac{1}{z-a} + \frac{\alpha f(z)}{(z-a)^2} + \frac{\alpha^2 f^2(z)}{(z-a)^3} + \cdots + \frac{\alpha^{n-1} f^{n-1}(z)}{(z-a)^n} + \frac{\alpha^n f^n(z)}{(z-a)^n F(z)}$$

Soit de plus,

$$J_n = \frac{1}{2i\pi}\int_{(S)} \frac{f^n(z)\,\Pi(z)}{(z-a)^{n+1}}\,dz,$$

et:

$$R_n = \frac{1}{2i\pi}\int_{(S)} \frac{\alpha^n f^n(z)\,\Pi(z)}{(z-a)^n F(z)}\,dz,$$

on obtiendra en multipliant les deux membres par $\Pi(z)\,dz$, et intégrant le long du contour,

$$\frac{\Pi(\zeta)}{F'(\zeta)} = J_0 + \alpha J_1 + \alpha^2 J_2 + \cdots + \alpha^{n-1} J_{n-1} + R_n.$$

Soit maintenant σ le périmètre de la courbe S, z_0 l'affixe d'un de ses points, et λ le facteur de Mr. Darboux, nous pourrons écrire:

$$R_n = \frac{\lambda\sigma\,\Pi(z_0)}{2\pi F(z_0)}\left[\frac{\alpha f(z_0)}{z_0 - a}\right]^n$$

Or, on a pour tous les points de S, la condition $\mathrm{mod.}\left[\frac{\alpha f(z)}{z-a}\right] < 1$, le reste R_n tend donc vers zéro quand n augmente au delà de toute limite, et on en conclut sous forme de série convergente,

$$\frac{\Pi(\zeta)}{F'(\zeta)} = J_0 + \alpha J_1 + \alpha^2 J_2 + \cdots + \alpha^n J_n + \cdots,$$

L'expression des coefficients J est facile à trouver ; nous avons vu en effet que l'on a généralement :

$$\frac{D_a^n \Phi(a)}{1.2..n} = \frac{1}{2i\pi}\int_{(S)} \frac{\Phi(z)\,dz}{(z-a)^{n+1}};$$

on en conclut en posant : $\Phi(z) = f(z)^n \Pi(z)$:

$$J_n = \frac{D_a^n [f^n(a)\Pi(a)]}{1,2,3,\ldots n},$$

nous arrivons ainsi à la formule :

$$\frac{\Pi(\zeta)}{F'(\zeta)} = \sum \frac{\alpha^n D_a^n [f^n(a)\Pi(a)]}{1,2\ldots n}$$

$$(n = 0,1,2,\ldots\ldots)$$

C'est là une première expression analytique de la série de Lagrange ; nous allons en déduire une seconde non moins importante. Posons

$$\Pi(z) = \Phi(z)F'(z) = \Phi(z)[1-\alpha f'(z)],$$

et mettons pour abréger Φ et f à la place de $\Phi(a)$ et $f(a)$

Il vient alors :

$$\Phi(\zeta) = \sum \frac{\alpha^n D_a^n [f^n \Phi(1-\alpha f')]}{1,2,\ldots n}$$

ce qu'on peut encore écrire en isolant le premier terme correspondant à $n=0$

$$\Phi + \sum \frac{\alpha^{n+1} D_a^{n+1} (\Phi f^{n+1})}{1.2\ldots n+1} - \sum \frac{\alpha^{n+1} D_a^n [\Phi f^n f']}{1,2,\ldots n}$$

$$(n = 0,1,2,\ldots\ldots)$$

Réunissons maintenant les termes qui contiennent la même puissance de α, il vient d'abord

$$\Phi(\zeta) = \Phi + \sum \frac{\alpha^{n+1} D_a^n [(\Phi f^{n+1})' - (n+1)\Phi f^n f']}{1,2,\ldots\ldots n+1}$$

et comme on a : $(\Phi f^{n+1})' = (n+1)\Phi f^n f' + \Phi' f^{n+1}$, on trouve :

$$\Phi(\zeta) = \Phi + \sum \frac{\alpha^{n+1} D_a^n [\Phi'(a) f^{n+1}(a)]}{1,2,\ldots n+1}$$

$$(n = 0,1,2,\ldots\ldots).$$

Nous ferons l'application de la série de Lagrange à l'équation de Képler $z = nt + e \sin z$, qui est d'une importance fondamentale dans la mécanique céleste et où nous avons désigné par z l'anomalie excentrique.

Soit à cet effet : $nt = a$, $f(z) = \sin z$, on obtient la série suivante

$$z = a + e\sin a + \frac{e^2 D_a(\sin^2 a)}{1,2} + \ldots + \frac{e^n D_a^{n-1}(\sin^n a)}{1,2\ldots n}$$

et il reste encore à trouver l'expression générale de la quantité $D_a^{n-1}(\sin^n a)$.

On emploie, dans ce but, la formule qui donne une puissance quelconque de sin a en fonction linéaire du sinus ou cosinus des arcs multiples de a. Par un calcul facile on en conclut, si l'on écrit pour abréger, $n_i = \frac{n(n-1)\cdots(n-i+1)}{1, 2 \ldots i}$

$$2^{n-1} D_a^{n-1} (\sin^n a) = n^{n-1} \sin na - n_1 (n-2)^{n-1} \sin (n-2) a + n_2 (n-4)^{n-1} \sin (n-4) a$$
$$+ \cdots + (-1)^i n_i (n-2i)^{n-1} \sin (n-2i) a,$$

le dernier terme correspondant à $i = \frac{n-2}{2}$, ou $i = \frac{n-1}{2}$, suivant que n est pair ou impair. La détermination de la limite des valeurs de l'excentricité pour lesquelles cette série est convergente est une question de la plus grande importance. Laplace a le premier obtenu le nombre 0,662743...... Cauchy est ensuite parvenu beaucoup plus facilement au même résultat; voici comment son procédé est présenté par Mr Rouché dans le beau mémoire déjà cité.

Nous avons établi précédemment que l'équation $z = a + \alpha f(z)$ a une seule racine à l'intérieur d'un contour S, comprenant le point a, lorsque tout le long de ce contour le module de $\frac{\alpha f(z)}{z-a}$ est moindre que l'unité. On aura donc, en supposant que S soit la circonférence $z = a + Re^{i\varphi}$, la condition : $\mathrm{mod}\, \frac{\alpha f(a+Re^{i\varphi})}{R} < 1$. Désignons par $F(R)$, pour des valeurs données de a et R, le maximum du module de $f(a+Re^{i\varphi})$ quand on fait croître φ de zéro à 2π, et admettons pour plus de simplicité que α soit réel, cette condition devient $\frac{\alpha F(R)}{R} < 1$, et donne $\alpha < \frac{R}{F(R)}$. On voit ainsi que le maximum par rapport à R de l'expression $\frac{R}{F(R)}$ est la plus grande valeur possible de α.

Pour obtenir, lorsqu'on suppose $f(z) = \sin z$, le module maximum de $f(a+Re^{i\varphi})$ j'emploie l'égalité.

$$\sin(\alpha + i\beta) \sin(\alpha - i\beta) = \cos^2 i\beta - \cos^2 \alpha$$
$$= \left(\frac{e^{\beta} + e^{-\beta}}{2}\right)^2 - \cos^2 \alpha$$

et je suppose :

$$\alpha + i\beta = a + R\cos\varphi + iR\sin\varphi,$$

d'où :

$$\alpha = a + R\cos\varphi,$$
$$\beta = R\sin\varphi.$$

On voit que β dépend uniquement de φ ; le maximum cherché s'obtiendra donc en disposant de cette quantité de manière que $\frac{e^{\beta}+e^{-\beta}}{2}$ et par conséquent β soit le plus grand possible. Nous avons ainsi : $\beta = R$, et par conséquent :

$$F(R) = \frac{e^{R} + e^{-R}}{2}$$

Pour arriver ensuite au maximum de $\frac{R}{F(R)}$, qui donne la limite supérieure de l'excentricité, nous égalons à zéro la dérivée, d'où l'équation ;

$$e^{R}(R-1) - e^{-R}(R+1) = 0.$$

Le premier membre prend des valeurs de signes contraires quand on y fait $R = 1$ et $R = 2$; sa dérivée est la fonction $R(e^{R} - e^{-R})$ qui est toujours

négative; nous n'avons donc qu'une racine positive comprise entre 1 et 2.

Remarquons ensuite qu'ayant $e^{2R} = \frac{R+1}{R-1}$, on tire de là successivement

$$e^{R} = \frac{R+1}{\sqrt{R^2-1}}, \qquad e^{-R} = \frac{R-1}{\sqrt{R^2-1}},$$

et l'on en conclut :

$$\frac{2R}{e^{R}+e^{-R}} = \sqrt{R^2-1}.$$

Ce résultat permet d'obtenir facilement au moyen de R, la limite cherchée des valeurs de l'excentricité qui rendent la série convergente. Quelques légères différences se trouvent dans les nombres donnés par divers auteurs; M. Stieltjes a refait avec le plus grand soin les calculs et a trouvé les valeurs suivantes dans lesquelles toutes les décimales sont exactes :

$$R = 1{,}19967\ 86402\ 57734$$
$$e = 0{,}66274\ 34193\ 492\ldots$$

Il ne sera pas inutile de donner maintenant la méthode de Laplace qui a conduit pour la première fois aux résultats que nous venons d'établir et qui est extrêmement digne d'attention.[1]

Reprenons à cet effet la série,

$$z = a + e\sin a + \frac{e^2 D_a(\sin^2 a)}{1.2} + \cdots + \frac{e^n D_a^{n-1}(\sin^n a)}{1.2\ldots n} + \cdots$$

où le coefficient de e^n a pour expression :

$$\frac{1}{2^{n-1}\Gamma(n+1)}\Big[n^{n-1}\sin na - n_1(n-2)^{n-1}\sin(n-2)a + n_2(n-4)^{n-1}\sin(n-4)a$$
$$+ \cdots + (-1)^i n_i (n-2i)^{n-1}\sin(n-2i)a\Big]$$

le dernier terme s'obtenant pour $i = \frac{n-2}{2}$ ou $i = \frac{n-1}{2}$, suivant que n est pair ou impair. Laplace observe que ce coefficient ne peut surpasser la quantité suivante

$$\frac{1}{2^{n-1}\Gamma(n+1)}\Big[n^{n-1} + n_1(n-2)^{n-1} + n_2(n-4)^{n-1} + \cdots + n_i(n-2i)^{n-1}\Big],$$

qui est une série finie, qu'on peut d'après les valeurs de n_1, n_2, et i représenter de cette manière ;

$$S = f(0) + f(1) + f(2) + \cdots\cdots + f(i).$$

en posant :

$$f(x) = \frac{(n-2x)^{n-1}}{2^{n-1}\Gamma(x+1)\Gamma(n-x+1)}$$

---

(1) Sur le développement des coordonnées elliptiques dans le supplément au T. V de la Mécanique céleste.

Il en cherche ensuite une valeur approchée pour n très grand et pour cela, se fonde sur ce que l'intégrale définie $J = \int_a^b f(x)\,dx$, où $f(x)$ est une fonction quelconque que je supposerai positive, donne une telle valeur pour la somme, $f(a)+f(a+1)+\ldots\ldots+f(b)$. Enfin et c'est ici le point essentiel de son analyse, Laplace obtient cette intégrale, en appliquant une méthode d'une grande importance, qu'il a exposée dans la théorie analytique des probabilités (p - 97), pour l'intégration des différentielles qui renferment des facteurs élevés à de grandes puissances. Voici, en peu de mots, pour le cas où nous aurons à l'employer, en quoi elle consiste.

Je supposerai que x croissant de a à b, la fonction $f(x)$, qui est positive, aille d'abord en augmentant jusqu'à un certain maximum, pour décroître ensuite. J'admettrai que ce maximum corresponde à une racine simple $x = \xi$ de l'équation $f'(x) = 0$, de sorte que $f''(\xi)$ soit différente de zéro et négative. Cela étant je fais dans l'intégrale $J = \int_a^b f(x)\,dx$, un changement de variable en posant,

$$f(x) = f(\xi)\,e^{-t^2}.$$

Aux valeurs de x qui croissent de $x = \xi$ à $x = b$, je fais correspondre pour t une série de valeurs positives de $t = 0$ à $t = \beta$, puis dans l'intervalle compris entre $x = \xi$ et $x = a$ des valeurs négatives depuis $t = 0$, jusqu'à $t = -\alpha$.

La transformée obtenue étant ainsi :

$$J = f(\xi)\int_{-\alpha}^{\beta} e^{-t^2}\,dx,$$

j'écris la relation proposée sous cette autre forme,

$$t = \sqrt{\log f(\xi) - \log f(x)},$$

afin d'en tirer l'expression de la variable x en série ordonnée suivant les puissances de t, au moyen de la formule de Lagrange concernant l'équation, $x = a + t\,\varphi(x)$

Cette équation donne $x = a$ pour $t = 0$, et la proposée $x = \xi$ dans la même hypothèse; nous prendrons donc $a = \xi$; cela étant, écrivons en résolvant par rapport à t;

$$t = \frac{x - \xi}{\varphi(x)},$$

et posons,

$$\frac{x - \xi}{\varphi(x)} = \sqrt{\log f(\xi) - \log f(x)},$$

la fonction $\varphi(x)$ sera déterminée par la formule suivante :

$$\varphi(x) = \frac{x - \xi}{\sqrt{\log f(\xi) - \log f(x)}}.$$

On conclut donc de la série de Lagrange :

$$x = a + t\,\varphi(a) + \frac{t^2 D_a\,(\varphi^2 a)}{1.2} + \dots$$

le développement qu'il s'agissait d'obtenir, en remplaçant $\varphi(x)$ par son expression et en introduisant dans les coefficients la valeur $a = \xi$, lorsque les différentiations auront été effectuées. Il est aisé d'ailleurs de voir que les dérivées d'un ordre quelconque de $\varphi(x)$ sont finies quand on pose $x = \xi$. Nous avons en effet par la formule de Taylor, en ayant égard à la condition $f'(\xi) = 0$, le développement,

$$f(x) = f(\xi) + \frac{(x-\xi)^2 f''(\xi)}{1.2} + \frac{(x-\xi)^3 f'''(\xi)}{1.2.3} + \dots$$

On en tire

$$\log f(x) - \log f(\xi) = A\,(x-\xi)^2 + B\,(x-\xi)^3 + \dots$$

le premier coefficient $A = \frac{f''(\xi)}{2f(\xi)}$ étant différent de zéro, puisqu'on a supposé que $x = \xi$ était une racine simple de l'équation $f'(\xi) = 0$. L'expression $\sqrt{\log f(\xi) - \log f(x)}$ conduit donc à une série de la forme, $G(x-\xi) + H(x-\xi)^2 + \dots$ où G n'est point nul. Il en résulte, que tous les coefficients du développement de,

$$\varphi(x) = \frac{x-\xi}{\sqrt{\log f(\xi) - \log f(x)}}$$

$$= \frac{1}{G + H\,(x-\xi) + \dots},$$

suivant les puissances de $x - \xi$, sont finis ; les quantités $\varphi^n(\xi)$ comme nous voulions l'établir, sont donc elles mêmes finies.

Représentons maintenant par,

$$x = \xi + Pt + Qt^2 + Rt^3 + \dots$$

la série tirée de l'équation

$$f(x) = f(\xi)\,e^{-t^2};$$

on aura en différentiant :

$$dx = (P + 2Qt + 3Rt^2 + \dots)\,dt,$$

et par suite,

$$J = f(\xi)\int_{-\alpha}^{\beta} e^{-t^2}(P + 2Qt + 3Rt^2 + \dots)\,dt.$$

Sans entrer dans la question de convergence de ce développement, supposons $f(x) = F^n(x)$, l'exposant n étant un grand nombre, l'équation précédente peut alors s'écrire :

$$F(x) = F(\xi)\,e^{-\frac{t^2}{n}}$$

et l'on voit que l'expression de x procédant suivant les puissances de $\frac{t}{\sqrt{n}}$, on a une raison plausible d'admettre au moins pour les premiers termes cette convergence. Et il serait à fort peu près de même dans le cas plus général, de l'expression,

$$f(x) = F^n(x) F_1(x)$$

on peut écrire en effet,

$$f(x) = \left[F(x) F_1^{\frac{1}{n}}(x)\right]^n,$$

et le facteur $F_1^{\frac{1}{n}}(x)$ différant peu de l'unité pour de grandes valeurs de n, on est sensiblement ramené au premier cas.

Cela étant, le premier terme de l'expression de J, nous donne d'après la valeur, $P = \sqrt{-\frac{2f(\xi)}{f''(\xi)}}$ qu'on trouve facilement,

$$J = f(\xi)\sqrt{-\frac{2f(\xi)}{f''(\xi)}}\int_{-\alpha}^{\beta} e^{-t^2} dt.$$

Nous remarquerons maintenant que la quantité $\int_{-\alpha}^{\beta} e^{-t^2} dt$, présente cette circonstance d'être même pour des valeurs médiocrement grandes des limites α et β, extrêmement rapprochée de l'intégrale définie $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}$. Nous pouvons écrire en conséquence:

$$J = \sqrt{2\pi}\, f(\xi)\sqrt{-\frac{f(\xi)}{f''(\xi)}},$$

et c'est la formule dont nous allons faire usage, en l'appliquant à la fonction

$$f(x) = \frac{(n-2x)^{n-1}}{2^{n-1}\Gamma(x+1)\Gamma(n-x+1)}$$

afin de parvenir à la valeur asymptotique de la somme

$$f(0) + f(1) + f(2) + \dots + f(i)$$

où i, comme nous l'avons vu, est $\frac{n-2}{2}$ ou $\frac{n-1}{2}$, suivant que n est pair ou impair. Le premier point consiste à former l'équation $f'(x) = 0$; nous emploierons dans ce but les expressions approchées,

$$\log\Gamma(x+1) = (x+\tfrac{1}{2})\log x - x + \log\sqrt{2\pi},$$

$$\log\Gamma(n-x+1) = (n-x+\tfrac{1}{2})\log(n-x) - n + x + \log\sqrt{2\pi},$$

qui donnent d'abord:

$$\log f(x) = (n-1)\log\left(\frac{n}{2}-x\right) - (x+\tfrac{1}{2})\log x - (n-x+\tfrac{1}{2})\log(n-x) + n - \log 2\pi,$$

puis en différentiant:

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{2n-2}{2x-n} - \log x + \log(n-x) - \frac{1}{2x} - \frac{1}{2(x-n)}.$$

Négligeant dans le second membre, $-\frac{2}{2x-n} - \frac{1}{2x} - \frac{1}{2(x-n)}$, nous écrirons:

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{2n}{2x-n} - \log x + \log(n-x),$$

d'où en différentiant une seconde fois:

$$\frac{f''(x)}{f(x)} - \frac{f'^2(x)}{f^2(x)} = -\frac{0\,4n}{(2x-n)^2} - \frac{1}{x} + \frac{1}{x-n}.$$

$$= -\frac{n^3}{x(n-x)(n-2x)^2}.$$

L'équation cherchée $f'(x) = 0$ est donc:

$$\frac{2n}{2x-n} = \log\frac{x}{n-x};$$

si l'on pose avec Laplace $x = n\omega$, elle devient

$$\frac{2}{2\omega-1} = \log\frac{\omega}{1-\omega},$$

et il est aisé de voir qu'on retrouve l'équation en R qui a été considérée (p. 185), en faisant $\omega = \frac{R-1}{2R}$.

Soit donc $\xi = n\omega$, on a ensuite:

$$\frac{f''(\xi)}{f(\xi)} = -\frac{n^3}{\xi(n-\xi)(n-2\xi)^2},$$

d'où,

$$-\frac{f(\xi)}{f''(\xi)} = \frac{\xi(n-\xi)(n-2\xi)^2}{n^3}$$

et par conséquent:

$$J = \sqrt{2\pi}\, f(\xi)\sqrt{-\frac{f(\xi)}{f''(\xi)}}$$

$$= \sqrt{2\pi}\, f(\xi)\,\frac{[\xi(n-\xi)]^{\frac{1}{2}}(n-2\xi)}{\sqrt{n^3}}.$$

Dans le calcul de $f(\xi)$ que nous ferons au moyen des valeurs approchées de $\Gamma(\xi+1)$ et $\Gamma(n-\xi+1)$, la base des logarithmes népériens sera désignée comme l'a fait M. Tisserand dans son traité de Mécanique céleste, par la lettre E, afin de réserver à e sa signification habituelle en astronomie.

On aura ainsi:

$$\Gamma(\xi+1)\,\Gamma(n-\xi+1) = 2\pi E^{-n}\left[\xi(1-\xi)\right]^{\frac{1}{2}}\xi^{\xi}(n-\xi)^{n-\xi}$$

ce qui donne après une réduction facile:

$$J = \frac{2}{\sqrt{2\pi n^3}}\left[\frac{E(n-2\xi}{2\xi^{\frac{\xi}{n}}(n-\xi)^{1-\frac{\xi}{n}}}\right]^n$$

ou encore si l'on remplace ξ par $n\omega$:

$$J = \frac{2}{\sqrt{2\pi n^3}}\left[\frac{E(1-2\omega)}{2\omega^{\omega}(1-\omega)^{1-\omega}}\right]^n$$

Nous ferons une nouvelle simplification en employant l'équation en ω, que j'écrirai ainsi :

$$E^{\frac{2}{2\omega-1}} = \frac{\omega}{1-\omega},$$

puis sous cette autre forme :

$$E = \frac{\omega^{\omega-\frac{1}{2}}}{(1-\omega)^{\omega-\frac{1}{2}}}.$$

En éliminant E, on trouvera plus simplement :

$$J = \frac{2}{\sqrt{2\pi n^3}}\left[\frac{1-2\omega}{2\sqrt{\omega(1-\omega)}}\right]^n;$$

c'est l'expression asymptotique de la quantité :

$$\frac{1}{2^{n-1}\Gamma(n+1)}\left[n^{n-1}+n_1(n-2)^{n-1}+n_2(n-4)^{n-1}+\dots+n_i(n-2i)^{n-1}\right]$$

qui est une limite supérieure du coefficient de la n^e puissance de l'excentricité, dans le développement en série de l'anomalie excentrique. La valeur que l'excentricité e, ne devra point dépasser pour que cette série soit convergente s'obtient donc en posant pour n infini, la condition.

$$\left(e^n J\right)^{\frac{1}{n}} = 1,$$

c'est à dire :

$$\frac{e(1-2\omega)}{2\sqrt{\omega(1-\omega)}} = 1$$

et par conséquent,

$$e = \frac{2\sqrt{\omega(1-\omega)}}{1-2\omega}.$$

En remplaçant ω par $\frac{R-1}{2R}$, on en conclut ;

$$e = \sqrt{R^2-1},$$

ce qui est le résultat précédemment obtenu par une voie si différente, en employant des notions d'analyse, qu'on n'a possédées que longtemps après Laplace.

Laplace a généralisé la série de Lagrange, en considérant le système suivant de deux équations à deux inconnues :

$$F(x,y) = x - a - \alpha\varphi(x,y) = 0,$$
$$G(x,y) = y - b - \beta\psi(x,y) = 0.$$

Voici la forme élégante sous laquelle M. Darboux a présenté ce résultat important.

Désignons les solutions par $x = \xi$, $y = \eta$, et soit :

$$\Delta(x,y) = \frac{dF}{dx}\cdot\frac{dG}{dy} - \frac{dF}{dy}\,\frac{dG}{dx},$$

on aura :

$$\frac{\Pi(\xi,\eta)}{\Delta(\xi,\eta)} = \sum \frac{\alpha^m \beta^n}{1.2,\ldots m.1.2\ldots n} \frac{d^{m+n}(\Pi\varphi^m\psi^n)}{da^m db^n}$$

en écrivant pour abréger dans le second membre Π, φ, ψ au lieu de $\Pi(a,b), \varphi(a,b), \psi(a,b)$, et on remarquera que $\Delta(x,y)$ est le déterminant fonctionnel des premiers membres des équations proposées, expression analogue, autant qu'il est possible, à la dérivée d'une seule fonction par rapport à la variable dont elle dépend. Cette formule, comme celle de Lagrange, appelle l'attention sur les combinaisons analytiques, qui figurent comme coefficients des puissances des quantités α et β.

Je donnerai l'idée de leur importance que Jacobi a reconnue et signalé le premier, et j'indiquerai d'abord en peu de mots comment l'illustre auteur a conclu de la série de Lagrange le développement suivant les puissances de α du radical $\frac{1}{\sqrt{1-2\alpha x+\alpha^2}}$ qui joue un rôle fondamental dans de hautes questions de mécanique céleste et de physique mathématique.

Faisons dans l'équation $z = a + \alpha f(z)$, $a = x$ $f(z) = \frac{z^2-1}{2}$; elle devient ainsi : $\alpha z^2 - 2z + 2x - \alpha = 0$ et a pour racines :

$$\xi = \frac{1 \pm \sqrt{1-2\alpha x+\alpha^2}}{\alpha}$$

Celle dont la formule de Lagrange donne le développement doit se réduire à $\xi = x$ pour $\alpha = 0$, et correspond au signe $-$ du radical ; faisant donc dans la première forme de cette série, $\Pi(z) = 1$, on en conclut le développement de $\frac{1}{1-\alpha\xi}$, c'est-à-dire de la quantité : $\frac{1}{\sqrt{1-2\alpha x+\alpha^2}}$, sous la forme suivante :

$$\frac{1}{\sqrt{1-2\alpha x+\alpha^2}} = \sum \frac{\alpha^n D_x^n (x^2-1)^n}{2^n.1,2,\ldots n}.$$

On donne le nom de polynômes de Legendre, afin de rappeler les découvertes du grand géomètre, aux coefficients des puissances de α, et on les désigne par X_n, de sorte qu'on a :

$$X_n = \frac{D_x^n (x^2-1)^n}{2^n.1.2\ldots n},$$

et au moyen de cette expression, on démontre sans peine un grand nombre de propriétés remarquables auxquelles Legendre n'est parvenu que par une analyse plus longue. En premier lieu l'équation $X_n = 0$ a toutes ses racines réelles, distinctes et comprises entre -1 et $+1$. Voici comment cette proposition se conclut du théorème de Rolle. L'équation $(x^2-1)^n = 0$ a pour racines 1 et -1, et ces racines sont chacune d'ordre n de multiplicité. La dérivée $D_x (x^2-1)^n = 0$, admet par suite 1 et -1 comme racines d'ordre $n-1$ de multiplicité, et de plus une racine réelle x_0, comprise entre -1 et $+1$. La dérivée seconde $D_x^2 (x^2-1)^n = 0$, admet donc

1 et −1 comme racines d'ordre $n-2$ et de plus 2 racines réelles, l'une comprise entre −1 et x_0, l'autre entre x_0 et +1. En continuant ainsi de proche en proche, on voit que $D^n(x^2-1)^n=0$, ou $X_n=0$ a n racines réelles inégales et comprises entre −1 et +1. Désignons-les par $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_k$, en les rangeant par ordre de grandeur croissante, l'une quelconque d'entre elles est comprise entre $\cos\frac{(2n-2k)\pi}{2n+1}$ et $\cos\frac{(2n-2k-1)\pi}{2n+1}$, proposition remarquable découverte par M. Markoff, (Mathematische Annalen, T. 27, page 177).

J'indiquerai encore, en me bornant à les énoncer les résultats suivants

Les indices m et n étant différents, on a la relation:

$$\int_{-1}^{+1} X_m X_n \, dx = 0,$$

et s'ils son égaux:

$$\int_{-1}^{+1} X_n^2 \, dx = \frac{2}{2n+1}$$

Le polynôme X_n developpé suivant les puissances décroissantes de la variable, s'exprime par la formule:

$$X_n = \frac{1.3.5\ldots 2n-1}{1.2.3\ldots\ldots n}\left[x^n - \frac{n(n-1)}{2(2n-1)}x^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2.4(2n-1)(2n-3)}x^{n-4} - \ldots\right]$$

Trois fonctions consécutives X_{n-1}, X_n, X_{n+1} sont liées par l'égalité:

$$(n+1)X_{n+1} - (2n+1)x X_n + n X_{n-1} = 0,$$

et on peut en conclure la réalité des racines de l'équation $X_n=0$ par une méthode analogue à celle que l'on emploie pour établir le théorème de Sturm.

La fonction X_n satisfait à une équation différentielle du second ordre qui se présente souvent en analyse, à savoir:

$$(x^2-1)\frac{d^2X_n}{dx^2} + 2x\frac{dX_n}{dx} - n(n+1)X_n = 0$$

Je dirai enfin quelques mots d'une propriété, découverte simultanément par M. Tchebicheff et Heine, qui se rattache à une théorie importante d'analyse; celle des fractions continues algébriques.

Considérons une série ordonnée suivant les puissances descendantes de la variable:

$$S = \frac{\alpha_0}{x} + \frac{\alpha_1}{x^2} + \cdots\cdots + \frac{\alpha_{n-1}}{x^n} + \cdots;$$

et soit:

$$A = a_0 + a_1 x + \cdots\cdots + a_n x^n,$$

un polynôme à coefficients indéterminés du degré n.

Disposons de ces coefficients de manière que le produit AS manque des termes en $\frac{1}{x}, \frac{1}{x^2}, \ldots \frac{1}{x^n}$, on aura ainsi les équations:

$$\begin{gathered}
\alpha_0 a_0 + \alpha_1 a_1 + \cdots\cdots + \alpha_n a_n = 0 \\
\alpha_1 a_0 + \alpha_2 a_1 + \cdots\cdots + \alpha_{n+1} a_n = 0 \\
\alpha_2 a_0 + \alpha_3 a_1 + \cdots\cdots + \alpha_{n+2} a_n = 0 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\alpha_{n-1} a_0 + \alpha_n a_1 + \cdots\cdots + \alpha_{2n-1} a_n = 0,
\end{gathered}$$

qui, en général déterminent A, sauf un facteur constant. Cela étant, nous obtenons la relation :

$$AS = B + \frac{\varepsilon}{x^{n+1}} + \frac{\varepsilon}{x^{n+2}} + \cdots,$$

en désignant par B un polynôme de degré n-1, et l'on en conclut :

$$S = \frac{B}{A} + \frac{1}{A}\left(\frac{\varepsilon}{x^{n+1}} + \frac{\varepsilon'}{x^{n+2}} + \cdots\right)$$

Cette expression de S montre que le développement, suivant les puissances descendantes de la variable, de la fraction rationnelle $\frac{B}{A}$, coïncide avec la série jusqu'aux termes en $\frac{1}{x^{2n}}$, puisqu'en développant la quantité $\frac{1}{A}\left(\frac{\varepsilon}{x^{n+1}} + \frac{\varepsilon'}{x^{n+2}} + \cdots\right)$ on a une suite telle que $\frac{\eta}{x^{2n+1}} + \frac{\eta'}{x^{2n+2}} + \cdots\cdots$

La fraction $\frac{B}{A}$ est désignée sous le nom de réduite d'ordre n et la théorie des fractions continues algébriques a pour principal objet de conduire à un algorithme qui permet de former de proche en proche toutes les réduites ; il nous suffit ici d'avoir fixé l'ordre d'approximation avec lequel elles expriment la fonction représentée par la série S.

Ceci posé, nous allons démontrer que X_n est précisément le dénominateur de la réduite d'ordre n de la fonction $\log\frac{x+1}{x-1} = 2\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{3x^3} + \frac{1}{5x^5} + \cdots\right)$

Je considère, à cet effet, l'intégrale définie :

$$J = \int_{-1}^{+1} (z^2-1)^n D^n\left(\frac{1}{x-z}\right) dz\,;$$

elle s'obtient à l'aide de la formule déjà employée $\int UV^n dx = \Theta + (-1)^n \int VU^n dx$, où l'on a :

$$\Theta = UV^{n-1} - U'V^{n-2} + \cdots\cdots - (-1)^{n-1} U^{n-1} V.$$

En remarquant que cette quantité Θ est nulle aux limites, car $(z^2-1)^n$ et toutes ses dérivées jusqu'à l'ordre n-1 inclusivement s'annulent par $z=1$ et $z=-1$ on en conclut, si l'on remplace $D_z^n(z^2-1)^n$ par $2^n.1.2\ldots\ldots n\, Z_n$, l'expression suivante :

$$\frac{(-1)^n J}{2^n.1.2\ldots n} = \int_{-1}^{+1} \frac{Z_n\, dz}{x-z}$$

Cela étant l'intégrale de la fonction rationnelle se calcule en mettant $Z_n - X_n + X_n$ au lieu de Z_n. Nous amenons ainsi la quantité $\frac{Z_n - X_n}{x-z}$ qui est un polynôme entier du degré n-1 en x et en z ; l'intégrale $\int_{-1}^{+1} \frac{Z_n - X_n}{x-z} dz$ est donc un polynôme en x du degré n-1, que nous désignerons par P_n'. Nous avons de cette manière :

$$J = \int_{-1}^{+1} X_n \frac{dz}{x-z} + P_n\,,$$

et par conséquent :

$$J = X_n \log\frac{x+1}{x-1} + P_n.$$

Ce résultat met en évidence la proposition que nous voulions établir. On voit, en effet, que le développement de l'expression $D_z^n\left(\frac{1}{x-z}\right)$, suivant les

puissances descendantes de x, commençant par un terme en $\frac{1}{x^{n+1}}$ l'intégrale proposée : $J=\int_{-1}^{+1}(z^2-1)^n D_z^n\left(\frac{1}{x-z}\right)dz$, est de la forme : $\frac{\alpha_0}{x^{n+1}}+\frac{\alpha_1}{x^{n+2}}+\ldots$ Il en résulte que $\log\frac{x+1}{x-1}+\frac{P_n}{X_n}$, c'est-à-dire $\frac{J}{X_n}$ est une série ordonnée suivant les puissances positives croissantes de $\frac{1}{x}$, et qui commence par un terme $\frac{1}{x^{2n+1}}$; cette propriété est caractéristique, et montre que $\frac{P_n}{X_n}$ est la réduite d'ordre n de $\log\frac{x+1}{x-1}$.

Je ne m'arrêterai pas d'avantage aux propriétés des polynômes de Legendre, voulant encore revenir à la résolution des équations par les séries qui, avant les découvertes analytiques de Cauchy, a été l'objet de travaux importants remontant jusqu'à Newton. On doit à l'auteur du livre des Principes une méthode célèbre, connue sous le nom de règle du parallélogramme analytique, par laquelle se déterminent les exposants les plus élevés du développement des diverses racines y de toute équation algébrique, $F(x,y)=0$, suivant les puissances descendantes de x. Nous renverrons à l'ouvrage de MM. Briot et Bouquet où cette règle se trouve complètement exposée au § 34, p. 42 ; en nous bornant à rappeler que M. Minding en a tiré un procédé extrêmement remarquable pour obtenir exactement le degré de l'équation qui résulte de l'élimination d'une inconnue entre deux équations algébriques entre x et y. Mais nous nous arrêterons un moment à un caractère arithmétique des séries de la forme :

$$y=\alpha_0+a_1x+\alpha_2x^2+\cdots\cdots$$

lorsqu'elles proviennent d'une équation algébrique $F(x,y)=0$, dont nous supposerons les coefficients entiers. On doit à Eisenstein, l'un des plus éminents géomètres de notre époque, qui a attaché son nom à de grandes découvertes en arithmétique, cette remarque bien intéressante qu'il suffit lorsque les coefficients de la série sont des fractions, de changer x en hx, h désignant un entier convenablement choisi pour qu'ils deviennent tous des nombres entiers, sauf le premier. C'est ce qu'on établit comme il suit :

Changeons d'abord y en α_0+y, de manière à obtenir une nouvelle équation qui soit satisfaite par $x=0$ et $y=0$. Elle sera, en ordonnant suivant les puissances croissantes de y de la forme : $P+P_1y+P_2y^2+\cdots=0$, $P, P_1, P_2, \ldots\ldots$ étant des polynômes en x dont le premier s'annule pour $x=0$. Pour plus de simplicité, nous admettrons que l'équation n'ait qu'une seule racine qui s'évanouisse avec x, en écrivant donc :

$$P=gx+hx^2+\cdots\cdots$$
$$P_1=g_1+h_1x+\cdots\cdots$$
$$P_2=g_2+h_2x+\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

et supposant tous les coefficients entiers, g sera nécessairement différent de zéro.

Soit maintenant $x = g_1^2 t$, $y = g_1 u$; on pourra supprimer le facteur g_1^2 dans l'équation entre les nouvelles variables t et u, qui aura la forme suivante :

$$Gt + Ht^2 + \dots + [1 + G_1 t + H_1 t^2 + \dots] u + [G_2 + H_2 t + \dots] u^2 \dots\dots = 0,$$

$G, G_1 \dots\dots H, H_1, \dots\dots$ étant entiers. Écrivons enfin cette relation comme il suit :

$$u = -\frac{Gt + Ht^2 + \dots\dots}{1 + G_1 t + H_1 t^2 + \dots} - \frac{G_2 + H_2 t + \dots}{1 + G_1 t + H_1 t^2 + \dots} u^2 - \dots\dots$$

ou encore, en effectuant les divisions indiquées :

$$u = At + A't^2 + \dots\dots + (B + B't + \dots\dots) u^2 + \dots$$

et faisons la substitution : $u = mt + m't^2 + m''t^3 + \dots\dots$;
l'identification donne immédiatement les égalités :

$$m = A$$
$$m' = A' + Bm^2$$
$$m'' = A'' + 2mm' + B'm^2$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Elles montrent sur le champ que $m, m', m'', \dots\dots$ s'exprimant de proche en proche en fonction entière et à coefficients entiers des quantités $A, A', \dots\dots B, B', \dots\dots$ qui sont toutes des nombres entiers, seront nécessairement aussi des nombres entiers ; la proposition d'Eisenstein se trouve donc démontrée.

Soit par exemple l'équation : $y^n = (1-x)^{-m}$, qui donne d'après la formule du binôme :

$$y = \sum \frac{m(m+n)\dots\dots[m+(i-1)n]}{1, 2, \dots\dots i . n^i} x^i ;$$

nous changerons y en $1+y$, de manière à obtenir la transformée :

$$ny + \frac{n(n-1)}{1.2} y^2 + \dots\dots = mx + \frac{m(m-1)}{1, 2} x^2 + \dots\dots$$

On voit ainsi que le nombre désigné plus haut par g_1 a pour valeur n ; par conséquent, la série du binôme dans le cas de l'exposant $-\frac{m}{n}$ se change en une autre dont les coefficients sont des nombres entiers si d'une part on remplace x par $n^2 t$, et qu'ensuite on pose : $y = nu$. On en conclut que l'expression suivante :

$$\frac{m(m+n)\dots\dots[m+n(i-1)]n^{i-1}}{1, 2, 3 \dots\dots i}$$

se réduit toujours à un nombre entier.

Une conséquence immédiate du théorème d'Eisenstein, c'est que e^x et $\log(1+x)$ sont des fonctions transcendantes ; il est clair, en effet, que par le changement de x en kx, les séries qui les représentent :

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \cdots\cdots + \frac{x^n}{1,2\ldots\ldots n}$$

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots\cdots \pm \frac{x^n}{n} + \cdots\cdots$$

ne pourront jamais avoir tous leurs coefficients entiers

M. Tchebicheff a été plus loin dans cette voie, et est arrivé à des résultats extrêmement dignes d'intérêt. Étant donnée une fonction : $\alpha_0 + \alpha_1 x + \cdots\cdots + \alpha_n x^n + \cdots\cdots$ ordonnée en série par rapport aux puissances croissantes de x, réduisons chaque coefficient α_n, que nous supposons rationnel, à sa plus simple expression $\frac{N}{d}$. Soit p_n le plus grand des diviseurs premiers de d, et pour un moment, nommons la limite du quotient $\frac{p_n}{n}$ pour $n = \infty$, l'indice de la série. Cela étant, la proposition due à l'illustre géomètre, consiste en ce que toute série à coefficients rationnels qui résulte d'une fonction composée de fonctions algébriques, logarithmiques et exponentielles en nombre fini, a pour indice un nombre nécessairement fini.

Considérons, par exemple, la suite $\sum \frac{x^n}{n^2+1}$; M. Tchebicheff a démontré que n^2+1 contient des facteurs premiers qui augmentent indéfiniment avec n ; l'indice de cette série est donc infini ; elle représente par conséquent une transcendante, qui ne peut résulter d'aucune combinaison de fonctions algébriques, exponentielles et logarithmiques en nombre limité

Ajoutons que la réciproque de la proposition de M. Tchebicheff n'a pas lieu ; c'est ce qui résulte de la formule donnée page 94 :

$$\frac{2K}{\pi} = \sum \left(\frac{1.3\ldots\ldots 2n-1}{2.4\ldots\ldots 2n}\right)^2 k^{2n},$$

où les coefficients des puissances de la variable k, sont les carrés des coefficients du développement algébrique :

$$(1-k^2)^{-\frac{1}{2}} = \sum \frac{1.3\ldots\ldots 2n-1}{2.4\ldots\ldots 2n} k^{2n}$$

M. Liouville a établi, en effet, que l'intégrale $K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}$ ne peut être exprimée par des combinaisons en nombre fini de fonctions algébriques, logarithmiques et exponentielles du module. (Sur les transcendantes elliptiques de première et de seconde espèce considérées comme fonctions de leur module. (Journal de Mathématiques, T. V, page 34)

20ème Leçon.

Les racines des équations nous ont présenté un premier exemple de fonctions non uniformes qui, pour chaque valeur de la variable, sont susceptibles d'un nombre fini ou infini de déterminations, selon que l'équation est algébrique ou transcendante. Nous allons montrer maintenant comment le calcul intégral conduit à des fonctions non uniformes, d'une indétermination totale, dans ce sens que la variable, en partant d'un point donné pour y revenir après avoir décrit un certain contour, engendre ainsi une succession de valeurs, qui peuvent approcher autant qu'on le veut, d'une quantité arbitraire. Ce fait analytique si important est une conséquence de la conception de l'intégrale définie, telle que l'a donnée Cauchy. Il convient, avant de l'exposer, de montrer en premier lieu, comment les déterminations multiples de la fonction $u = \log z$, déduites de l'équation $e^u = z$, résultent de l'intégrale $u = \int_1^z \frac{dz}{z}$.

Fig. 56

Soit $OA = 1$ et z le point variable dont l'affixe est z (fig. 56).

Considérons le chemin AZ, auquel correspond une certaine valeur (AZ) pour l'intégrale proposée, et décrivons avant de le suivre, un contour ABC enveloppant l'origine, dans le sens direct. L'intégrale ainsi obtenue sera $2i\pi + (AZ)$; et en parcourant, autant de fois que l'on voudra, dans le sens direct ou indirect le contour fermé ABC, on trouve ainsi:

$$2ni\pi + (AZ),$$

n étant un entier quelconque positif ou négatif. Ce sont bien les déterminations en nombre infini auxquelles a conduit la considération de l'équation $e^u = z$

Plaçons-nous à un point de vue plus général, et soit:

$$\Phi(z) = \int_{z_0}^{z} f(z)\,dz,$$

où $f(z)$ désigne une fonction uniforme admettant un nombre quelconque de discontinuités: $a, b, \ldots$ auxquelles correspondent les résidus $A, B, \ldots$ Soit J l'une des valeurs de l'intégrale correspondant à un chemin déterminé quelconque $Z_0 Z$; comme tout à l'heure on verra qu'en faisant décrire à la variable des contours comprenant successivement les points $a, b, c, \ldots$, les déterminations qui en résultent pour $\Phi(z)$ sont comprises dans la formule.

$$2i\pi(mA + nB + \ldots) + J,$$

$m, n, \ldots\ldots$ étant des entiers quelconques positifs ou négatifs.

Cette expression, composée des éléments arithmétiques $m, n, \ldots\ldots$ et des constantes fixes $A, B, \ldots\ldots$, donne lieu à la remarque suivante, qui est d'une grande importance. Considérons d'abord le cas de trois résidus A, B, C, qu'on devra supposer des quantités réelles ou imaginaires; on démontre que, si ces quantités ne vérifient point la condition $\alpha A + \beta B + \gamma C = 0$, où α, β, γ sont entiers, il est possible de disposer des nombres m, n, p de manière que l'expression $mA + nB + pC$ soit moindre que toute quantité donnée. De là résulte que si la fonction $f(z)$ admet trois résidus au moins, l'intégrale est indéterminée, puisqu'elle est susceptible de prendre des valeurs aussi voisines qu'on le veut les unes des autres. Il est donc impossible de concevoir $\Phi(z)$ comme une fonction de z, à moins, ce que Puiseux a observé le premier, de faire entrer la quantité z_0 et le chemin suivi de z_0 à z comme élément nécessaire de la détermination de la fonction. Ce sont des considérations arithmétiques délicates qui conduisent au résultat que nous venons d'indiquer, en ce qui concerne le cas de trois résidus. Mais voici des procédés plus élémentaires suffisant pour mettre en pleine évidence l'indétermination de l'intégrale ou de la fonction $\Phi(z)$ lorsqu'on suppose:

$$f(z) = \frac{1}{z^2+1} + \frac{a^2}{z^2+a^2},$$

la constante a étant réelle et incommensurable. On voit que cette fonction admet pour pôles $\pm i$ et $\pm ai$; les résidus correspondants sont $\pm \frac{1}{2i}$ et $\pm \frac{a}{2i}$; la valeur générale de l'intégrale $\Phi(z)$ est par suite:

$$J + \pi(m - na);$$

cela étant, nous allons démontrer que $m - na$ peut représenter un nombre réel quelconque et avec une approximation que nous fixerons. C'est là un des résultats d'une importante théorie, due à M. Tchebicheff, et exposée par lui dans un beau et savant travail publié en langue russe dans les Mémoires de St Pétersbourg. La méthode suivante que nous allons employer pour y parvenir est entièrement élémentaire (Voir Journal de Borchardt, tome LXXXVIII, 1879).

Soient $\frac{m}{n}, \frac{m'}{n'}$, deux réduites consécutives du développement en fraction continue de a; posons:

$$\alpha n = N + \omega,$$

$$\alpha n' = N' + \omega',$$

en désignant par N, N' deux nombres entiers, par ω et ω' des quantités inférieures en valeur absolue à $\frac{1}{2}$. Posons encore pour abréger:

$$\varepsilon = mn' - m'n = \pm 1;$$

nous considérerons les deux entiers x, y donnés par les formules :

$$\varepsilon x = mN' - m'N,$$
$$\varepsilon y = nN' - n'N.$$

On en conclut facilement :

$$\varepsilon(x - ay) = (m - an)N' - (m' - an')N$$
$$= (m - an)(\alpha n' - \omega') - (m' - an')(\alpha n - \omega)$$
$$= \varepsilon\alpha + \omega(m' - an') - \omega'(m - an),$$

et par suite :

$$\varepsilon(x - ay - \alpha) = \omega(m' - an') - \omega'(m - an).$$

Nommons maintenant λ le quotient complet correspondant à la réduite $\frac{m'}{n'}$; on aura comme on sait :

$$a = \frac{m + \lambda m'}{n + \lambda n'} :$$

d'où : $$m - an = \frac{\varepsilon\lambda}{n + \lambda n'}, \qquad m' - an' = -\frac{\varepsilon}{n + \lambda n'}$$

et par suite :

$$\omega(m' - an') - \omega'(m - an) = -\varepsilon\frac{\omega + \lambda\omega'}{n + \lambda n'} ;$$

De là résulte :

$$x - ay - \alpha = -\frac{\omega + \lambda\omega'}{n + \lambda n'} ;$$

et comme ω et ω' sont moindres que $\frac{1}{2}$, on en conclut pour limite supérieure de cette expression la quantité $\frac{1}{2}\frac{\lambda + 1}{n + \lambda n'}$. Or, il suffit de l'écrire ainsi $\frac{1}{2n'}\left(1 + \frac{n' - n}{n + \lambda n'}\right)$, pour voir immédiatement qu'elle décroît lorsque λ augmente puisqu'on a : $n' > n$; son maximum s'obtient donc pour $\lambda = 1$. Écrivons en conséquence :

$$x - ay - \alpha = \frac{\theta}{n + n'},$$

en désignant par θ un nombre inférieur en valeur absolue à l'unité ; n et n' croissent au-delà de toute limite ; il est ainsi démontré qu'on peut trouver deux entiers x et y tels que la quantité $x - ay$ diffère aussi peu qu'on le veut d'un nombre donné quelconque α.

Nous déterminerons en dernier lieu la limite supérieure de l'entier y qui a été obtenue par M. Tchebicheff. Ayant en effet :

$$\varepsilon y = nN' - n'N = n(\alpha n' - \omega') - n'(\alpha n - \omega),$$

ou simplement :

$$\varepsilon y = \omega n' - \omega' n ;$$

on voit que cet entier est renfermé entre $+\frac{n + n'}{2}$ et $-\frac{n + n'}{2}$.

Les expressions de x et y conduisent facilement à une autre conséquence qu'il n'est pas inutile de remarquer. Supposons qu'on ait : $g - ah - \alpha = 0$,

g et h étant entiers, je dis qu'à partir d'une certaine réduite du développement de a en fraction continue, et pour toutes celles qui suivent, on trouvera constamment : $x = g$, $y = h$. Nous avons en effet, par la théorie des fractions continues:

$$a = \frac{m}{n} + \frac{\theta}{nn'}, \qquad a = \frac{m'}{n'} + \frac{\theta'}{n'n''},$$

θ et θ' étant des quantités moindres que l'unité en valeur absolue.

Par suite, puisque $\alpha = g - ah$, il vient:

$$\alpha n = ng - h\left(m + \frac{\theta}{n'}\right),$$
$$\alpha n' = n'g - h\left(m' + \frac{\theta''}{n''}\right),$$

N et N' sont donc les entiers les plus voisins des quantités $ng - h\left(m + \frac{\theta}{n'}\right)$ et $n'g - h\left(m' + \frac{\theta}{n''}\right)$; et la condition que ω et ω' sont $< \frac{1}{2}$ en valeur absolue montre qu'à partir d'une valeur de n' plus grande que $2h$, on aura :

$$N = ng - mh,$$
$$N' = n'g - m'h.$$

Or, en calculant x et y par les formules:

$$\varepsilon x = mN' - m'N,$$
$$\varepsilon y = nN' - n'N,$$

on trouve:

$$x = g, \qquad y = h;$$

c'est le résultat que nous voulions obtenir.

Supposons que la quantité a satisfasse à une équation du second degré à coefficients entiers $g - ah - a^2 = 0$, on pourra, au moyen de son développement en fraction continue obtenir les entiers g et h, et déterminer ainsi les diviseurs des équations algébriques de la forme $x^2 + px + q$, p et q étant entiers. On sait d'ailleurs qu'une autre méthode pour arriver à ce même but est fondée sur la périodicité de la fraction continue qui représente a.

Soit maintenant:

$$f(z) = \frac{1}{z^2+1} + \frac{a^2}{z^2+a^2} + \frac{1}{z-p} + \frac{b}{z-q};$$

a et b étant réels et incommensurables, l'expression générale de $\Phi(z)$ devient :

$$J + \pi(m - na) + 2i\pi(m' - bn');$$

d'après ce que nous venons de voir, on peut prendre les entiers m, n, m', n', tels que $\Phi(z)$ diffère aussi peu qu'on le veut d'un nombre donné quelconque $\alpha + i\alpha'$. $\Phi(z)$ est donc absolument indéterminé.

Les considérations que nous venons d'exposer montrent qu'en général la fonction $\Phi(z) = \int_{z_0}^{z} f(z)\,dz$ exige pour sa détermination qu'on se donne le chemin suivi de la limite inférieure z_0 à la limite supérieure z et c'est à ce résultat qu'on s'est longtemps arrêté. Il était réservé à Riemann d'accomplir un grand progrès en substituant à cette notion analytique une

nouvelle conception qui conduit à des fonctions uniformes, mais affectées de coupures.

Supposons, par exemple, que la fonction $f(z)$ ait trois pôles a, b, c, auxquels correspondent les résidus A, B, C, (fig. 57).

Soit $\Phi(z) = \int_{z_0}^{z} f(z)\,dz$ et J la valeur de cette intégrale prise le long d'un certain chemin $z_0 z$, la formule qui donne toutes les valeurs de $\Phi(z)$ est:

$$\Phi(z) = J + 2i\pi(mA + nB + pC),$$

m, n, p étant des entiers quelconques.

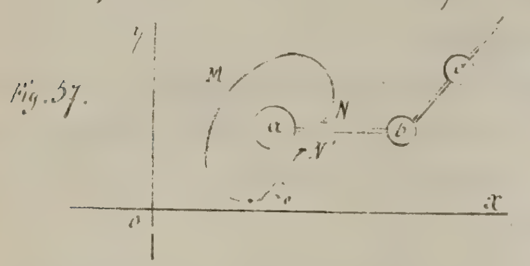


Fig. 57.

Entourons chaque pôle d'un contour infiniment petit; la fonction uniforme $f(z)$ sera finie et continue dans toute la partie du plan en dehors des aires limitées par ces contours.

Relions maintenant ces contours par des coupures formées de deux lignes infiniment voisines, l'une allant de A à B, l'autre de B à C et la dernière de C à l'infini.

Si nous interdisons à z l'espace limité par les coupures et les contours, la fonction $\Phi(z) = \int_{z_0}^{z} f(z)\,dz$ sera évidemment finie, continue et uniforme, puisque dans cette partie du plan $f(z)$ est holomorphe, et qu'on ne peut trouver aucun contour fermé qui comprenne un point de discontinuité de $f(z)$. Quant aux lignes de jonction $AB, BC, \ldots\ldots$ qui sont entièrement arbitraires, nous allons faire voir que ce sont des lignes de discontinuité, ayant le caractère analytique de coupures.

Soient N, N' deux points infiniment voisins, situés de part et d'autre de la coupure AB, par exemple. Allons de z_0 en N et N' par les chemins $z_0 N'$, $z_0 MN$, qui ne rencontrent pas la partie du plan limitée par les contours et les coupures; on aura.

$$\Phi(N) = (z_0 MN); \qquad \Phi(N') = (z_0 N');$$

d'où

$$\Phi(N) - \Phi(N') = (N' z_0 MN).$$

Si nous ajoutons l'élément infiniment petit (NN'), on voit que $\Phi(N) - \Phi(N')$ est l'intégrale de $f(z)$ prise le long d'un contour fermé comprenant le pôle A et décrit dans le sens négatif, c'est-à-dire $-2i\pi A$.

La variation de la fonction $\Phi(z)$ aux deux bords de la première coupure est donc $-2i\pi A$; aux deux bords de la seconde, ce sera $-2i\pi(A+B)$; on continuerait ainsi de proche en proche, quel que soit le nombre des pôles, et aux bords de la dernière coupure, on aura $-2i\pi\Sigma A$, ΣA désignant la somme de tous les résidus, c'est-à-dire le résidu intégral de $f(z)$. En admettant la condition $\Sigma A = 0$, la dernière coupure peut être supprimée; comme

n'étant plus une ligne de discontinuité, et en général si une somme $A + B$ par exemple, est nulle, la coupure correspondante, ici la deuxième, doit être omise.

Enfin, si tous les résidus sont nuls, toutes les coupures disparaissent; dans ce cas, en effet, l'intégrale de $f(z)\,dz$ étant algébrique et rationnelle, n'est susceptible en chaque point que d'une seule valeur.

Telle est, en quelques mots, la conception de Riemann, qui permet de ramener les intégrales des fonctions uniformes aux fonctions uniformes elles-mêmes.

L'illustre géomètre a été plus loin; il a réussi à transformer la fonction à deux déterminations distinctes, représentées par un radical carré en une fonction uniforme, mais affectées de coupures. Soit, par exemple:

$$F(z) = (z-a)(z-b)\ldots\ldots(z-l),$$

les quantités $a, b, \ldots\ldots l$ étant inégales.

Posons:

$$f(z) = \frac{F'(z)}{F(z)} \quad \text{et} \quad \Phi(z) = \int_{z_0}^{z} f(z)\,dz.$$

En construisant le système des coupures de $\Phi(z)$, on voit que les résidus de $\frac{F'(z)}{F(z)}$ étant tous égaux à l'unité, la variation de $\Phi(z)$ aux deux bords de la première sera: $-2i\pi$; de la seconde, $-4i\pi$; de la troisième, $-6i\pi$, et ainsi de suite.

Soit maintenant:

$$\varphi(z) = e^{\frac{1}{2}\Phi(z)};$$

cette formule sert de définition à une fonction uniforme, qui au signe près représente $\sqrt{\frac{F(z)}{F(z_0)}}$. Or on voit immédiatement qu'aux deux bords de la première coupure $\frac{\varphi(N)}{\varphi(N')} = -1$; aux deux bords de la seconde ce rapport est $+1$, et il en est de même pour toutes les coupures de rang pair; tandis qu'on trouve -1 pour les coupures de rang impair. En supprimant les coupures de rang pair qui ne sont pas pour $\varphi(z)$ des lignes de discontinuité, on obtient donc une fonction à sens unique $\varphi(z)$, qui change de signe en traversant les coupures de rang impair de $\Phi(z)$, et l'on a par suite transformé le radical carré $\sqrt{\frac{F(z)}{F(z_0)}}$ en une fonction uniforme.

Remarquons que la dernière coupure, celle qui s'étend à l'infini, n'existe que si le degré de $F(z)$ est impair.

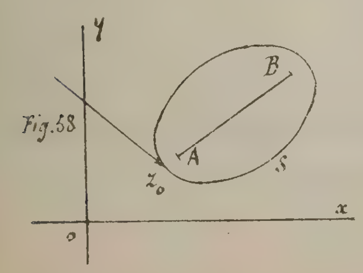


Fig. 58

Comme exemple des avantages d'une pareille transformation, nous considérerons l'intégrale $\int_{z_0}^{z} \frac{F(z)\,dz}{\varphi(z)}$, $F(z)$ étant une fonction uniforme quelconque et $\varphi(z)$ représentant le radical $\sqrt{(z-a)(z-b)}$. Soient Z_0, Z, A, B, les points qui ont pour affixes les quantités z_0, z, a, b; la fonction $\varphi(z)$ est une fonction uniforme qui admet pour coupure la droite AB (fig 58).

Ceci posé, on peut aller du point Z_0 au point Z, par un chemin qui ne comprenne pas la coupure AB; quel que soit ce chemin, l'intégrale a une seule et même valeur J, qu'on obtient, par exemple, en décrivant la droite Z_0Z.

On peut aussi décrire une courbe fermée S partant du point z_0 et entourant la coupure AB, et ensuite la droite Z_0Z; l'intégrale a alors pour valeur $J + S$, (S) désignant $\int_{(S)} \frac{F(z)\,dz}{\varphi(z)}$, et si on décrit la courbe S n fois, dans le sens positif ou négatif, la valeur générale de l'intégrale sera $J + n(S)$, n étant un entier positif ou négatif.

Fig. 59

Pour calculer (S) on peut substituer au contour S un chemin quelconque entourant la coupure AB; nous choisirons un chemin composé de deux parallèles à AB infiniment voisines PQ, $P'Q'$ et de deux demi-cercles infiniment petits PQ', $P'Q$ qui ont pour centres les points A et B (fig. 59).

En négligeant alors les termes infiniment petits fournis par l'intégration le long des demi-circonférences, il vient:

$$(S) = (PQ) + (P'Q');$$

or ayant:

$$(PQ) = \int_a^b \frac{F(z)\,dz}{\varphi(z)},$$

nous observerons qu'on doit écrire:

$$(P'Q') = \int_b^a - \frac{F(z)\,dz}{\varphi(z)};$$

puisqu'aux deux bords de la coupure $\varphi(z)$ change de signe. Nous obtenons en conséquence:

$$(S) = 2\int_a^b \frac{F(z)}{\varphi(z)}\,dz,$$

et la valeur générale de l'intégrale cherchée est par suite:

$$J + 2n\int_a^b \frac{F(z)}{\varphi(z)}\,dz.$$

Nous appliquerons ce résultat à la recherche de l'intégrale $J = \int_{-1}^{+1} \frac{F(z)\,dz}{\sqrt{1-z^2}}$, $F(z)$ étant un polynôme entier.

Fig. 60

Soient A et B les points $z = 1$ et $z = -1$, $2J$ sera, d'après ce que nous venons de voir, l'intégrale prise le long d'un contour quelconque comprenant AB. Or $F(z)$ est un polynôme entier, on peut donc agrandir ce contour indéfiniment, et prendre une circonférence ayant son centre à l'origine et dont

le rayon R soit infiniment grand, en posant : $z = Re^{it}$. Cela posé, employons la série :

$$\frac{1}{\sqrt{1-z^2}} = \frac{1}{iz}\left(1-\frac{1}{z^2}\right)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{iz}\sum \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots 2n}\frac{1}{z^{2n}}$$

en la multipliant par $F(z)$, on en conclut une expression assimilable à une fonction qui admettrait comme seul pôle $z=0$. Désignant donc par A le coefficient de $\frac{1}{z}$, c'est-à-dire le résidu correspondant au pôle $z=0$, on a : $2J = 2i\pi A$, ou $J = i\pi A$.

Soit en particulier $F(z) = z^{2n}$, il vient immédiatement :

$$J = \pi\,\frac{1.3.5\ldots\ldots 2n-1}{2.4.6\ldots\ldots 2n},$$

c'est-à-dire :

$$\int_0^1 \frac{z^{2n}}{\sqrt{1-z^2}}\,dz = \frac{\pi}{2}\,\frac{1.3.5\ldots\ldots 2n-1}{2.4.6\ldots\ldots 2n},$$

comme nous l'avons déjà établi.

Soit encore :

$$J = \int_{-1}^{+1}\frac{dz}{(a-z)\sqrt{1-z^2}};$$

nous remarquerons d'abord que l'intégrale $(S) = \int_R \frac{dz}{(a-z)\sqrt{1-z^2}}$ prise le long d'une circonférence ayant son centre à l'origine et dont le rayon R est infiniment grand, est nulle ; car le développement en série suivant les puissances descendantes de z de la fonction $\frac{1}{(a-z)\sqrt{1-z^2}}$, ne contient pas de terme en $\frac{1}{z}$; d'autre part, (S) s'exprime par la quantité 2J, augmentée de l'intégrale prise le long d'un contour infiniment petit entourant le point A, dont l'affixe est a.

Or à l'égard de ce contour, on peut traiter $\frac{1}{\sqrt{1-z^2}}$ comme une fonction uniforme ; ce qui donne immédiatement :

$$\int_A \frac{dz}{(a-z)\sqrt{1-z^2}} = \frac{2i\pi}{\sqrt{1-a^2}},$$

et l'on en conclut qu'en déterminant convenablement le signe du radical carré, on a :

$$J = \frac{i\pi}{\sqrt{1-a^2}} = \frac{\pi}{\sqrt{a^2-1}}.$$

Soit pour cela : $a = \alpha + i\beta$; nous trouverons :

$$J = \int_{-1}^{+1}\frac{dz}{(\alpha+i\beta-z)\sqrt{1-z^2}} = \int_{-1}^{+1}\frac{(\alpha-z)\,dz}{[(\alpha-z)^2+\beta^2]\sqrt{1-z^2}} - i\int_{-1}^{+1}\frac{\beta\,dz}{[(\alpha-z)^2+\beta^2]\sqrt{1-z^2}};$$

d'autre part, si l'on pose :

$$\sqrt{a^2-1} = A + iB,$$

on obtient :

$$J = \frac{\pi}{A+iB} = \pi \frac{A-iB}{A^2+B^2} ;$$

Le signe de la racine-carrée est donc fixé par la condition que B soit du signe de β ; ou, ce qui revient au même, A du signe de α ; la relation :

$$\sqrt{(\alpha+i\beta)^2-1} = A+iB ,$$

donnant, comme il est aisé de voir :

$$\alpha\beta = AB .$$

21ème Leçon.

Soit $R(z)$ un polynôme entier que nous supposerons essentiellement n'avoir que des facteurs simples, et $f(z)$ une fonction rationnelle. Nous allons considérer l'expression

$$J = \int_{z_0}^{z} \frac{f(z)}{\sqrt{R(z)}} dz ,$$

en nous proposant d'obtenir, comme nous l'avons fait précédemment pour l'intégrale des fonctions rationnelles, les déterminations résultant des divers chemins que peut suivre la variable entre les limites z_0 et z. C'est à Puiseux qu'est due la méthode que je vais suivre pour traiter cette question importante. Le savant géomètre l'a exposée dans un mémoire célèbre auquel je renvoie [1] en considérant les intégrales de différentielles algébriques quelconques ; je me bornerai au cas particulier qui suffit en vue de la théorie des fonctions elliptiques.

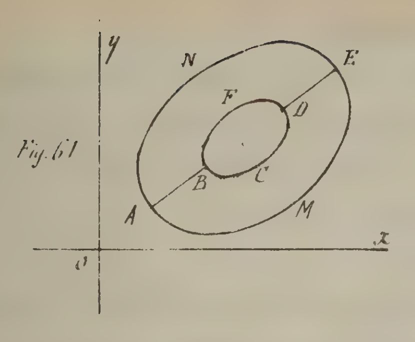
Je rappelle d'abord qu'en désignant par $f(z)$ une fonction uniforme, l'intégrale $\int f(z)\,dz$, prise successivement le long de deux contours fermés S et S', décrits en entier et une seule fois dans le sens direct, S' étant intérieur à S, conserve la même valeur sous la condition qu'à l'intérieur de l'aire limitée par ces deux contours, la fonction $f(z)$ n'ait aucune discontinuité.

Cette proposition fondamentale se modifie, comme on va voir, à l'égard de l'intégrale J, lorsqu'à l'intérieur du plus petit contour S' se trouve un nombre impair de racines de $R(z)$, la fonction rationnelle $f(z)$ n'ayant d'ailleurs aucune discontinuité dans l'aire limitée par S et S'.

Prenons pour le contour extérieur S la courbe AMENA et pour S' BCDFB (fig 61) ; traçons ensuite les lignes AB et DE qui les réunissent.

---

[1] Recherches sur les fonctions algébriques : Journal de Liouville. T. XV. p 395.



On a d'abord :

$$S = (AME) + (ENA)$$

$$S' = (BCD) + (DFB).$$

Observons maintenant qu'il n'y a dans l'aire AMECBA, ni pôles ni points de ramification, nous pouvons par conséquent, dans cette portion du plan considérer comme uniforme et continue la fonction $\frac{f(z)}{\sqrt{R(z)}}$, et écrire :

$$(AME) = (AB) + (BCD) + (DE).$$

Pour la même raison nous avons :

$$(ENA) = (ED) + (DFB) + (BA)$$

Cela posé, on remarquera que les termes (AB) et (BA), figurant dans ces relations, ne se rapportent pas à la même succession de valeurs de la fonction. Dans la seconde, en effet, c'est après avoir décrit le contour S' que nous revenons en B, pour suivre le chemin BA ; ce contour contenant un nombre impair de points de ramification, le radical, en reprenant la même valeur absolue, a changé de signe et l'intégrale (BA) est égale à (AB). On a au contraire $(DE) = -(ED)$, et en ajoutant membre à membre nous obtenons :

$$(AME) + (ENA) = 2(AB) + (BCD) + (DFB),$$

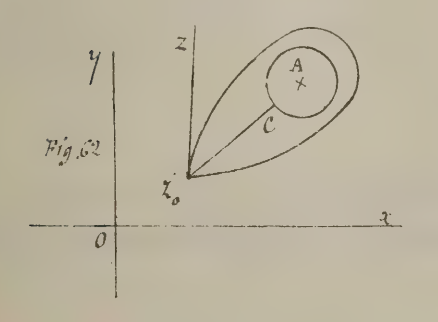
et par conséquent :

$$(S) = 2(AB) + (S').$$

Les deux intégrales désignées par (S) et (S') ont donc en général des valeurs différentes ; elles ne sont égales qu'en supposant $(AG) = 0$, ce qui a lieu si les deux contours S et S' ont un point commun.

Ajoutons, d'ailleurs, que si les points critiques de $f(z)$ à l'intérieur de S' sont en nombre pair, cette fonction pourra être assimilée le long des contours d'intégration à une fonction uniforme et l'on aura alors : $(S) = (S')$.

Ceci posé, voici comment s'obtiennent les déterminations multiples de l'intégrale proposée : $J = \int_{z_0}^{z} \frac{f(z)\,dz}{\sqrt{R(z)}}$ Supposons, pour plus de simplicité que $f(z)$ soit holomorphe, et soit z_0 et Z les points qui correspondent aux limites z_0 et z (fig 62). Avant de suivre le chemin $z_0 Z$, décrivons un contour fermé A comprenant une racine $z = a$ de l'équation :



$$R(z) = 0,$$

et désignons par (A) l'intégrale relative à ce contour.

Lorsqu'on est revenu au point de départ, on a trouvé une autre valeur du radical $\sqrt{R(z)}$ qu'il faut conserver dans l'intégration suivant $z_0 Z$ et qui nous donne en changeant de signe, la quantité $-(z_0 Z)$, d'où cette détermination de J pour le contour considéré, à savoir :

$$J = -(z_0 Z) + (A).$$

Cela étant, l'intégrale (A) s'obtient comme nous allons l'expliquer.

Décrivons une circonférence de rayons infiniment petit ρ, ayant son centre au point critique $z = a$, et soit C l'un de ses points. Le contour composé de la ligne droite $z_0 C$ de la circonférence décrite en entier et une seule fois, dans un certain sens et la ligne $C z_0$ pourra remplacer A. Les deux contours ont effectivement un point commun z_0, et dans la portion du plan qu'ils comprennent ne se trouve aucune discontinuité de la fonction. Soit donc pour un moment (ρ) l'intégrale relative à la circonférence, nous aurons :

$$(A) = (z_0 C) + (\rho) + (C z_0);$$

remarquant encore que le radical $\sqrt{R(z)}$ change de signe, quand on revient au point C après avoir décrit cette circonférence, nous obtenons

$$(C z_0) = (z_0 C)$$

et l'on en conclut :

$$(A) = 2(z_0 C) + (\rho).$$

J'ajoute que l'intégrale (ρ) est infiniment petite ; qu'on fasse en effet $z = a + \rho e^{it}$, ou pour abréger $z = a + \zeta$, ce qui donne $dz = i\zeta\, dt$; comme $z = a$ est une racine simple de $R(z)$, on peut écrire :

$$R(z) = \zeta R_1(\zeta)$$

en désignant par $R_1(\zeta)$ un polynôme entier en ζ, et nous trouvons ainsi :

$$(\rho) = \int_0^{2\pi} \frac{f(a+\zeta)\, i\zeta\, dt}{\sqrt{\zeta R_1(\zeta)}}$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{f(a+\zeta)\, i\, \zeta^{\frac{1}{2}}\, dt}{\sqrt{R_1(\zeta)}}$$

quantité qui s'annule avec ζ.

Le contour dont nous venons de faire usage et qui donne la formule :

$$(A) = 2\int_{z_0}^{a} \frac{f(z)\, dz}{\sqrt{R(z)}},$$

où l'intégrale est rectiligne, a été nommé par Puiseux contour élémentaire.

J'indiquerai immédiatement une application de ce résultat, en considérant la relation suivante :

$$x = \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}},$$

au moyen de laquelle peut se définir la fonction $z = \sin x$. Faisons décrire à la variable le chemin comprenant un des deux points critiques du radical $\sqrt{1-z^2}$ par exemple $z=1$, on obtient pour l'intégrale la nouvelle valeur

$$2\int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} - \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}},$$

c'est à dire $\pi - x$. Il en résulte que sans changer z, nous pouvons changer x en $\pi - x$, d'où la relation élémentaire

$$\sin x = \sin(\pi - x).$$

Une autre loi de succession des valeurs de la variable va nous conduire aux déterminations multiples de l'intégrale, qui donnent naissance à la périodicité de la fonction inverse.

Remplaçons le contour fermé que nous venons d'employer par un autre comprenant deux racines, a et b, au lieu d'une seule, du polynôme $R(z)$ (fig. 63). Soient A et B les points qui leur correspondent et (AB) la valeur obtenue lorsqu'on effectue l'intégration en suivant ce contour. Si l'on remarque que $\sqrt{R(z)}$, au lieu de changer de signe, a repris maintenant la même valeur, quand on revient au point Z_0, on trouve pour ce nouveau chemin l'expression

$$(AB) + (Z_0 Z).$$

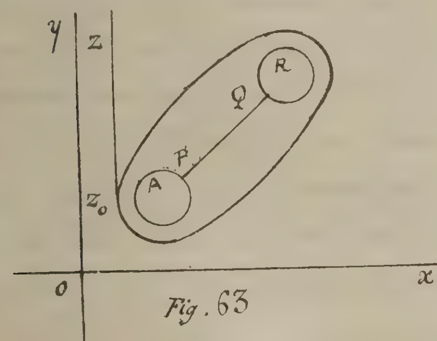


Fig. 63

Ceci posé, je considère deux circonférences infiniment petites ayant leurs centres en A et B, et pour rayons ρ et σ. Je les désigne par leurs rayons, je prends un point P sur la première et un point Q sur la seconde : il est clair que le contour AB peut être remplacé par le suivant:

$$PQ + \sigma + QP + \rho.$$

Observant ensuite que lorsqu'on revient au point Q après avoir décrit la circonférence σ, le radical a changé de signe, ce qui donne la relation :

$$(PQ) = (QP)$$

négligeant enfin les termes (ρ) et (σ) comme infiniment petits, nous avons simplement :

$$(AB) = 2(PQ)$$

$$= 2\int_a^b \frac{f(z)\,dz}{\sqrt{R(z)}}.$$

Ce résultat donne la périodicité de $\sin x$ comme conséquence de la relation:

$$x = \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}};$$

nous voyons, en effet, qu'en faisant décrire à la variable un contour comprenant les deux points critiques $z=-1$, $z=1$, on obtient une détermination représentée par :

$$2\int_{-1}^{+1}\frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}+\int_0^z\frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}=2\pi+x,$$

ce qui montre qu'on peut remplacer x par $2\pi+x$ sans changer z. Supposons ensuite que $R(z)$ soit un polynôme du quatrième degré et soit :

$$R(z)=(z-a)(z-b)(z-c)(z-d),$$

on parvient à cette conclusion qu'à une valeur quelconque de l'intégrale elliptique :

$$\int_{z_0}^{z}\frac{dz}{\sqrt{R(z)}},$$

s'ajoutent suivant les divers chemins suivis par la variable des multiples entiers des intégrales rectilignes.

$$\int_a^b\frac{dz}{\sqrt{R(z)}},\qquad \int_b^c\frac{dz}{\sqrt{R(z)}},\qquad \int_c^d\frac{dz}{\sqrt{R(z)}}.$$

Ces constantes ont reçu la dénomination d'indices de périodicité, elles sont liées par une relation qu'il est essentiel d'établir.

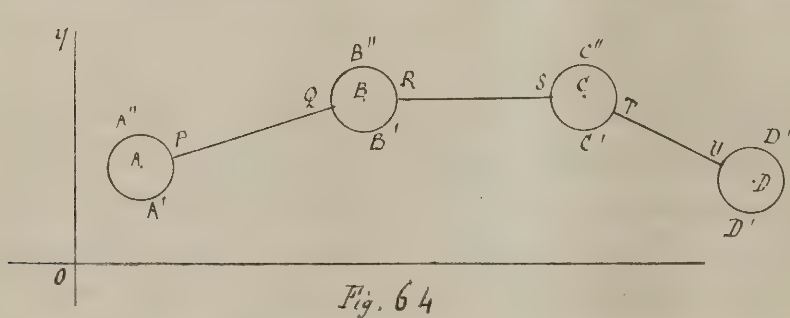


Fig. 64

Considérons pour cela les circonférences infiniment petites ayant pour centres les points A, B, C, D, qui correspondent aux racines de $R(z)$. Si nous joignons deux à deux ces circonférences pour les droites PQ, RS, TU, le contour fermé que représente cette succession de chemins à savoir :

$$PQ+QB'R+RS+SC'T+TU+UD'D''U$$
$$+UT+TC''S+SR+RB''Q+QP+PA''A'P,$$

comprendra à son intérieur tous les points critiques de $\sqrt{R(z)}$. Intégrons maintenant la différentielle $\frac{dz}{\sqrt{R(z)}}$ en suivant ce contour, et remarquons que les mêmes segments de droite, décrits dans des sens opposés donnent lieu aux relations suivantes :

$$(TU)=+(UT),$$
$$(RS)=-(SR),$$
$$(PQ)=+(QP),$$

d'après les signes que prend le radical $\sqrt{R(z)}$ lorsqu'on décrit successivement les diverses circonférences. Observons enfin que les intégrales relatives aux diverses portions des circonférences infiniment petites sont également infiniment petites, on aura pour résultat de l'intégration la quantité.

$$2(TU)+2(PQ),$$

c'est-à-dire :

$$2\int_c^d \frac{dz}{\sqrt{R(z)}} + 2\int_a^b \frac{dz}{\sqrt{R(z)}}.$$

Tout autre contour fermé comprenant les points qui sont les seules discontinuités de la différentielle, devant conduire à la même valeur de l'intégrale, choisissons une circonférence de rayon très grand, et dont le centre soit à l'origine. Pour tous les points de ce contour, on peut assimiler l'irrationnelle $\frac{1}{\sqrt{R(z)}}$ à la fonction uniforme qui résulte de son développement suivant les puissances descendantes de z ; or la série ainsi obtenue ne contenant point de terme en $\frac{1}{z}$, l'intégration effectuée le long de la circonférence donne pour résultat zéro. De là résulte la relation que nous voulions obtenir.

$$\int_c^d \frac{dz}{\sqrt{R(z)}} + \int_a^b \frac{dz}{\sqrt{R(z)}} = 0;$$

elle donne cette conséquence importante que les déterminations multiples de l'intégrale elliptique, se réduisent à l'expression :

$$\int_{z_0}^z \frac{dz}{\sqrt{R(z)}} + m\int_a^b \frac{dz}{\sqrt{R(z)}} + n\int_b^c \frac{dz}{\sqrt{R(z)}},$$

où entrent seulement deux entiers arbitraires m et n.

Voici une seconde méthode pour y parvenir, qui est purement algébrique.

Partant de la relation symétrique entre les variables z et z' où p et q sont des coefficients constants.

$$zz' + p(z+z') + q = 0,$$

je remarque qu'on peut disposer de ces constantes de manière à avoir simultanément :

$$z = a, \qquad z' = c,$$
$$z = b, \qquad z' = d.$$

On en conclut ensuite, en permutant z et z', que l'équation est vérifiée si l'on fait :

$$z = c, \qquad z' = a,$$
$$z = d, \qquad z' = b,$$

et de là résulte qu'elle peut être écrite sous ces deux formes, en désignant par g et h des constantes :

$$\frac{z-a}{z-b} = g\,\frac{z'-c}{z'-d}, \quad \frac{z-c}{z-d} = h\,\frac{z'-a}{z'-b}.$$

Prenons les inverses et l'on aura :

$$\frac{z-b}{z-a} = \frac{1}{g}\,\frac{z'-d}{z'-c}, \qquad \frac{z-d}{z-c} = \frac{1}{h}\,\frac{z'-b}{z'-a},$$

d'ou en différentiant :

$$\frac{(a-b)\,dz}{(z-b)^2} = g\,\frac{(c-d)\,dz'}{(z'-d)^2},$$

$$\frac{(c-d)\,dz}{(z-d)^2} = h\,\frac{(a-b)\,dz'}{(z'-a)^2},$$

$$\frac{(b-a)\,dz}{(z-a)^2} = \frac{1}{g}\,\frac{(d-c)\,dz'}{(z'-c)^2}$$

$$\frac{(d-c)\,dz}{(z-c)^2} = \frac{1}{h}\,\frac{(b-a)\,dz'}{(z'-a)^2},$$

puis en multipliant membre à membre et extrayant la racine quatrième :

$$\frac{dz}{\sqrt{R(z)}} = \pm \frac{dz}{\sqrt{R(z')}},$$

l'intégration donne enfin.

$$\int_a^b \frac{dz}{\sqrt{R(z)}} = \pm \int_c^d \frac{dz'}{\sqrt{R(z')}}$$

si l'on remarque qu'aux limites $z=a$, $z=b$ correspondent pour z', les valeurs $z'=c$, et $z'=d$.

Après avoir considéré sous la forme la plus générale, l'intégrale elliptique de première espèce dans ce qui précède, nous nous attacherons maintenant à sa forme canonique où l'on a :

$$R(z) = (1-z^2)(1-k^2z^2)$$

et nous admettons que le module k soit réel et moindre que l'unité.

Les indices de périodicité étant alors :

$$\int_{-1}^{+1} \frac{dz}{\sqrt{R(z)}}, \qquad \int_1^{\frac{1}{k}} \frac{dz}{\sqrt{R(z)}},$$

nous emploierons les déterminations suivantes. On pose d'abord :

$$K = \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{R(z)}},$$

ce qui donne :

$$2K = \int_{-1}^{+1} \frac{dz}{\sqrt{R(z)}}.$$

On écrit ensuite :

$$iK' = \int_1^{\frac{1}{k}} \frac{dz}{\sqrt{R(z)}}$$

et nous observerons que si l'on change de variable en faisant $z^2 = t$, on obtient ces nouvelles expressions :

$$K = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t(1-t)(1-k^2t)}}$$

$$iK' = \frac{1}{2}\int_1^{\frac{1}{k^2}} \frac{dt}{\sqrt{t(1-t)(1-k^2t)}}$$

Nous ramènerons les deux intégrales à avoir les mêmes limites, zéro et l'unité, en appliquant à la seconde la substitution linéaire.

$$= \frac{1-k'^2u}{k^2}$$

où l'on suppose $k'^2 = 1-k^2$. Il vient ainsi:

$$K' = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{du}{\sqrt{u(1-u)(1-k'^2u)}},$$

ou encore si l'on fait $u = z^2$:

$$K' = \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{(1-z)(1-k'^2z^2)}},$$

on voit ainsi que K et K' sont respectivement les mêmes fonctions du module k et de son complément k'.

Rappelons maintenant la série établie p. 94, à savoir:

$$K = \frac{\pi}{2}\left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 k^4 + \ldots\right]$$

$$= \frac{\pi}{2} \sum \left(\frac{1,3,5 \ldots 2n-1}{2.4.6 \ldots 2n}\right)^2 k^{2n}$$

$$(n = 0, 1, 2, \ldots\ldots)$$

et qui subsiste sous la condition que le module de k soit inférieur à l'unité. Gudermann a fait la remarque importante qu'en posant $k = \sin\theta$, on obtient la formule:

$$K = \pi \sum \left(\frac{1,3,5 \ldots 2n-1}{2.4.6 \ldots 2n}\right)^2 \sin(4n+1)\theta,$$

d'où par conséquent:

$$K' = \pi \sum \left(\frac{1.3,5 \ldots 2n-1}{2.4.6 \ldots 2n}\right)^2 \cos(4n+1)\theta.$$

Soit enfin:

$$S_n = 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 k^4 + \ldots + \left(\frac{1,3,5 \ldots 2n-1}{2.4.6 \ldots 2n}\right)^2 k^{2n}$$

nous aurons pour K' cet autre développement d'une grande importance qu'a donné Legendre.

$$K' = K \log\frac{4}{k} - (K-1) - \frac{2}{2.4}(K-S_1) - \frac{2}{5.6}(K-S_2) - \ldots$$

Les quantités K et K', considérées par rapport au module k, offrent le premier exemple d'un genre entièrement nouveau de fonctions, dont l'étude générale appartient à la théorie des équations différentielles linéaires, et a été le sujet des belles et importantes découvertes de Mr Fuchs, l'un des plus

éminents analystes de notre époque. Sans recourir à des principes qui dépassent le cadre de ces leçons, nous établirons les propriétés caractéristiques de K et K', par une méthode élémentaire, dont je dois la communication bienveillante à M. Laguerre. Soit dans ce but, $x^2 = t$ et $k^2 = z$, j'écrirai afin de mettre la variable z en évidence.

$$K = K(z) = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t(1-t)(1-zt)}},$$

ce qui donne :

$$K' = K(1-z)\,\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t(1-t)[1-(1-z)t]}}$$

Semblablement nous aurons sous forme d'intégrale double, ainsi qu'on l'a vu p.

$$K(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^1\!\!\int_0^1 \frac{dx\,dy}{(1-xyz)\sqrt{x(1-x)y(1-y)}},$$

et ces formules, ainsi qu'on l'a expliqué, définissent K(z) comme une fonction holomorphe dans tout le plan, mais ayant pour coupure toute la partie positive de l'axe des abscisses, comptée depuis $x = OA = 1$ (fig 65)

Fig. 65

Soit $OM = \xi$, $MN = MN' = \lambda$, la différence des valeurs de $K(z)$ aux points infiniment voisins N et N' résulte de la proposition générale établie p.   , en supposant :

$$2\pi f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x(1-x)y(1-y)}}.$$

On en conclut, en effet, la relation :

$$K(\xi+i\lambda) - K(\xi-i\lambda) = i\int_{\frac{1}{\xi}}^1 \frac{y\,dx}{\sqrt{x(1-x)y(1-y)}},$$

où l'on sait qu'on doit remplacer dans l'intégrale y par $\frac{1}{\xi x}$. Cela posé, ramenons les limites à être zéro et l'unité, et soit dans ce but :

$$x = \frac{1-(1-\xi)t}{\xi}$$

ce qui donne :

$$y = \frac{1}{1-(1-\xi)t};$$

nous aurons ainsi :

$$K(\xi+i\lambda) - K(\xi-i\lambda) = i\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t(1-t)[1-(1-\xi)t]}},$$

c'est-à-dire :

$$K(\xi+i\lambda) - K(\xi-i\lambda) = 2iK'(\xi).$$

Considérons en second lieu la fonction $K'(z) = K(1-z)$, qui admet

pour coupure la partie négative de l'axe des abcisses. En supposant ζ négatif et désignant toujours par λ une quantité positive infiniment petite, les égalités :

$$K(\zeta+i\lambda)=K(1-\zeta-i\lambda),$$
$$K'(\zeta-i\lambda)=K(1-\zeta+i\lambda),$$

donnent immédiatement :

$$K'(\zeta+i\lambda)-K'(\zeta-i\lambda)=-2iK'(1-\zeta),$$

et par conséquent : $K'(\zeta+i\lambda)-K'(\zeta-i\lambda)=-2iK(\zeta)$.

M.r Goursat, maître de conférences à l'École Normale, parvient à ces relations par une autre méthode, qu'à ma demande il a bien voulu exposer dans la note suivante, où les propositions de M.r Fuchs se trouvent complètement établies sans qu'il soit nécessaire de rien emprunter à la théorie des équations différentielles linéaires.

Soient : $K=\int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{R(z)}}$, $iK'=\int_1^{\frac{1}{k}} \frac{dz}{\sqrt{R(z)}}$,

où $R(z)=(1-z^2)(1-k^2z^2)$. Posons $k^2=x$, $z^2=\frac{1-u}{1-ux}$; on trouve pour K et iK, les expressions suivantes :

$$2K=\int_0^1 \frac{du}{\sqrt{u(1-u)(1-xu)}} \quad , 2iK'=\int_0^{-\infty} \frac{du}{\sqrt{u(1-u)(1-xu)}}.$$

La première intégrale, prise suivant le segment de l'axe réel qui va de l'origine au point $u=1$ a un sens, pourvu que x n'ait pas une valeur réelle supérieure à l'unité, et il suffit de regarder la ligne indéfinie 1 —— $+\infty$ comme une coupure, pour que cette intégrale représente une fraction uniforme dans tout le plan. Pour achever de la définir, on conviendra de prendre 0 pour argument de u et de $1-u$ et pour argument de $1-xu$ celui qui se réduit à 0 pour $u=0$.

De même l'intégrale qui représente $2iK'$ définit une fonction uniforme de x dans tout le plan, si l'on regarde comme une coupure la ligne indéfinie $-\infty$ — 0 ; conservant les mêmes conventions que tout à l'heure pour les arguments de $1-u$ et de $1-xu$, on prendra l'argument de u égal à π.

Adjoignons à ces deux intégrales une troisième intégrale de même forme.

$$2K''=\int_1^{+\infty} \frac{du}{\sqrt{u(1-u)(1-xu)}}$$

où on prend 0 pour argument de u, $-\pi$ pour argument de $1-u$ et pour argument de $1-xu$ celui dont la valeur initiale est compris entre

$-\pi$ et $+\pi$. Cette intégrale a un sens pourvu que x n'ait pas une valeur réelle et positive inférieure à l'unité et lorsque x décrit un contour fermé renfermant à son intérieur le segment rectiligne $0 — 1$, chaque élément de l'intégrale et par suite l'intégrale elle-même change de signe. Pour achever de la rendre uniforme, on conviendra de regarder comme une coupure la ligne droite indéfinie $0 —— +\infty$. Remarquons seulement qu'en deux points infiniment voisins pris de part et d'autre de la coupure $1 —— +\infty$, les valeurs de K'' sont égales et de signes contraires.

Cela posé, supposons le point x dans la partie supérieure du plan, le point $\frac{1}{x}$ sera dans la partie inférieure et la fonction

$$\frac{1}{\sqrt{u(1-u)(1-xu)}}$$

sera holomorphe à l'intérieur du contour $a\,b\,n\,b'LML'a'm\,a$ (fig 66) et l'application du théorème de Cauchy nous donnera.

$$(L'a') + (a'm\,a) + (ab) + (b\,n\,b') + (b'L) + (LML') = 0.$$

Si maintenant on fait tendre vers zéro les rayons des deux petites circonférences, tandis que le rayon de la grande circonférence augmente indéfiniment, il vient à la limite.

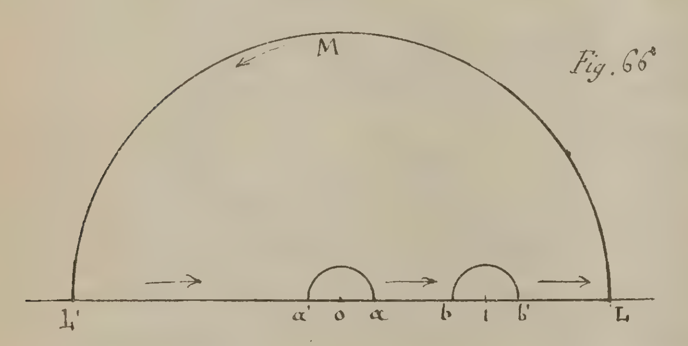


Fig. 66

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{du}{\sqrt{u(1-u)(1-xu)}} + \int_{0}^{1} \frac{du}{\sqrt{\quad}} + \int_{1}^{+\infty} \frac{du}{\sqrt{\quad}} = 0$$

Si on a pris 0 pour argument de u et de $1-u$ le long de ab, l'argument de u sera égal à π le long de $L'a'$ et l'argument de $1-u$ égal à $-\pi$ le long de $b'L$ et la relation précédente devient.

$$(1) \quad K - iK' = -K''$$

On trouvera tout pareillement, en supposant le point x dans la partie supérieure du plan et en opérant de la même manière la nouvelle relation.

$$(2) \quad K + iK' = K''.$$

Les formules (1) et (2) permettent de suivre la variation des intégrales K, K' quand on fait décrire à la variable x un contour fermé quelconque. Cherchons par exemple ce que deviennent ces fonctions lorsque x décrit un lacet dans le sens direct autour du point $x=0$. Nous savons déjà que K revient à sa valeur initiale. Quant à iK', je le remplace, avant de franchir la coupure $-\infty —— 0$, par, $K + K''$ d'après la formule (1); on arrive ainsi dans la partie inférieure du plan avec la fonction $K + K''$ pour prolongement analytique d iK', ou en remplaçant K'' par sa valeur tirée de la formule (2),

avec la fonction $2K + iK'$; la ligne 0 —— 1 n'étant une coupure pour aucune des intégrales K, iK', on reviendra au point de départ avec cette valeur $2K + iK'$! Un lacet dans le sens rétrograde changerait iK' en $-2K + iK'$. Un lacet autour du point $x = 1$ change de même K en $K \pm 2iK'$, sans changer la valeur de iK'.

22ème Leçon

Théorie des Fonctions elliptiques.

L'étude des fonctions circulaires, $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, a pour point de départ la définition géométrique de ces quantités d'où l'on tire en premier lieu leur périodicité, puis la détermination de toutes les solutions réelles des équations : $\sin x = \sin a$, $\cos x = \cos a$, $\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} a$, et enfin les formules fondamentales qui donnent $\sin(a+b)$, $\cos(a+b)$ et $\operatorname{tg}(a+b)$, au moyen des lignes trigonométriques relatives aux deux arcs a et b. On passe ensuite au théorème de Moivre, aux expressions de $\sin ma$ et $\cos ma$ en fonction de $\sin a$ et $\cos a$, lorsque m est entier, à l'étude des équations algébriques en $\sin \frac{a}{m}$ et $\cos \frac{a}{m}$ etc. En établissant enfin les développements en série de $\sin x$ et $\cos x$, les formules d'Euler qui ramènent à la simple exponentielle les fonctions circulaires, on a les points principaux de la théorie des plus simples en même temps des plus importantes transcendantes de l'analyse, qui interviennent dans les diverses branches des Mathématiques pures, ainsi que dans toutes les applications de calcul.

Mais de nombreuses et importantes questions conduisent à considérer d'autres fonctions plus générales, les transcendantes elliptiques qui comprennent comme cas particulier les fonctions circulaires.

Euler, le premier, les a introduites dans l'analyse en généralisant la définition des fonctions circulaires $z = \sin x$, $z = \operatorname{tg} x$, données par les égalités :

$$\int_0^z \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} = x, \quad \int_0^z \frac{dz}{1+z^2} = x$$

de la manière suivante :

Considérons l'intégrale elliptique de première espèce $\int_0^z \frac{dz}{\sqrt{R(z)}}$, où : $R(z) = (1-z^2)(1-k^2z^2)$; soit $z = \varphi(x)$ la fonction définie en posant : $\int_0^z \frac{dz}{\sqrt{R(z)}} = x$, de sorte qu'on ait :

$$\varphi'(x) = \sqrt{[1-\varphi^2(x)][1-k^2\varphi^2(x)]}$$

avec la condition $\varphi(0) = 0$. Euler a fait la découverte d'une importance capitale dans l'analyse de la formule suivante :

$$\varphi(a+b) = \frac{\varphi(a)\varphi'(b) + \varphi(b)\varphi'(a)}{1 - k^2\varphi^2(a)\varphi^2(b)}$$

et d'autres semblables, concernant les quantités $\sqrt{1-\varphi^2(x)}$, $\sqrt{1-k^2\varphi^2(x)}$. Ce sont ces relations qui ont ouvert à l'égard de la fonction $\varphi(x)$ la voie suivie dans la théorie des fonctions

circulaires, où l'on part des formules:

$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a,$$
$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b.$$

Elle a été parcourue avec le plus grand succès par Abel et Jacobi; et ce sont leurs découvertes qui, après celles d'Euler, de Lagrange et de Legendre, ont fondé la théorie de ces nouvelles fonctions dont on voit l'étroite liaison avec les fonctions trigonométriques. La dénomination des transcendantes elliptiques que Legendre a introduite rappelle que la longueur d'un arc d'ellipse dont le grand axe est l'unité, et l'excentricité la constante k, s'exprime par l'intégrale de seconde espèce: $\int_0^z \frac{1-k^2z^2}{\sqrt{R(z)}} dz$.

Mais il faut bien remarquer, comme nous l'avons déjà dit, qu'une fonction définie en posant:

$$\int_0^z \frac{1-k^2z^2}{\sqrt{R(z)}} dz = x$$

c'est-à-dire l'abcisse d'un point de l'ellipse, envisagé comme fonction de l'arc compté depuis l'extrémité du grand axe, jusqu'à ce point, n'aurait aucune analogie avec $\sin x$, ni aucune propriété simple qui en permettrait l'étude. Ainsi, l'analyse seule, et non la géométrie donne la définition des nouvelles quantités dont nous allons maintenant exposer les propriétés les plus essentielles.

La première de ces propriétés qui est restée ignorée d'Euler, de Lagrange et de Legendre, consiste dans la double périodicité de la fonction $\varphi(x)$, découverte en même temps par Abel et Jacobi, et qui résulte pour nous des déterminations multiples précédemment obtenues pour l'intégrale $\int^z \frac{dz}{\sqrt{R(z)}}$

C'est en nous proposant l'étude des fonctions doublement périodiques uniformes, considérées en général, que nous serons amenés par la voie la plus facile aux propriétés des transcendantes elliptiques et de la fonction $\varphi(x)$.

Voici sous ce point de vue une première remarque, due à Jacobi.

Je dis qu'une fonction uniforme $f(x)$ ne peut avoir deux périodes réelles a et b, et que la condition

$$f(x + ma - nb) = f(x),$$

où m et n sont deux entiers quelconques, entraîne une impossibilité.

Supposons d'abord a et b commensurables, de sorte qu'on ait $a = \omega\mu$, $b = \omega\nu$, μ et ν étant deux entiers premiers entre eux, on voit qu'en déterminant m et n par l'équation $m\mu - n\nu = 1$, les deux périodes a et b se ramèneront à la période unique ω. Supposons, en second lieu, $\frac{b}{a}$ incommensurable, on peut prendre m et n tels que $m - \frac{b}{a} n$ diffère aussi peu qu'on le veut d'un nombre donné α; il en résulte que la fonction $f(x)$ ne peut être qu'une constante puisqu'elle ne change point en ajoutant à la variable la quantité arbitraire αa. Il n'existe donc aucune fonction uniforme admettant deux périodes réelles, de là résulte une notion importante, celle du parallélogramme des périodes.

Fig. 67

Soient A et B les points dont les affixes sont a et b. Nous admettrons en changeant les signes des périodes s'il est nécessaire qu'ils soient tous deux, au dessus de l'axe des abcisses. Achevons le parallélogramme dont deux des côtés sont OA et OB; la figure $OACB$ sera par définition le parallélogramme des périodes.

Nous supposons ainsi qu'un rayon vecteur dirigé d'abord suivant Ox, puis tournant dans le sens direct autour de l'origine rencontrera d'abord le point A et ensuite le point B de sorte qu'en nommant λ et μ les angles AOx, BOx; on aura $\mu > \lambda$.

Soit pour un moment

$$a = \text{mod}.\, a\, e^{i\lambda}$$
$$b = \text{mod}.\, b\, e^{i\mu}.$$

Si l'on pose $\frac{b}{a} = \alpha + i\beta$, on voit que la quantité β ayant pour valeur $\text{Mod}(\frac{b}{a}) \sin(\mu - \lambda)$ sera nécessairement positive.

Plus généralement, soit P un point quelconque du plan. Menons par ce point deux droites PA, PB égales et parallèles aux droites OA, OB de la figure précédente; puis achevons le parallélogramme PACB, qui a pour côtés PA et PB; nous formons une figure que nous appellerons de même parallélogramme des périodes.

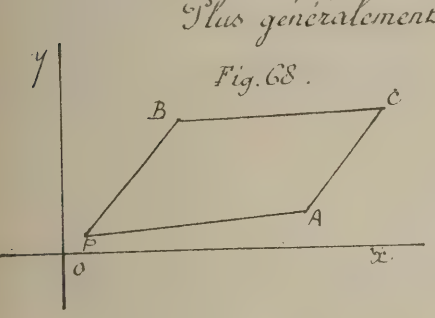


Fig. 68.

Désignons par p l'affixe du sommet P; il est aisé de voir que la variable

$$z = p + at + bu$$

représente pour des valeurs réelles de t et u un point quelconque du plan et qu'en supposant t et u compris entre zéro et l'unité, ce point est à l'intérieur du parallélogramme PABC. Soit maintenant:

$$t = m + T$$
$$u = n + V$$

m et n étant deux, nombres entiers choisis de telle manière que T et V soient positifs et moindres que l'unité. Nous considérerons comme correspondants les deux points qui ont pour affixes des valeurs de z en t et u d'une part, T et V de l'autre; ce dernier étant à l'intérieur du parallélogramme des périodes.

Cela étant on a:

$$\begin{aligned} z &= p + a(m + T) + b(n + T) \\ &= p + aT + bV + ma + nb, \end{aligned}$$

et on voit donc que les valeurs de la fonction doublement périodique $f(z)$, sont les mêmes en deux points correspondants, et qu'il suffira par suite d'obtenir son expression à l'intérieur du parallélogramme des périodes pour l'avoir dans toute l'étendue du plan.

En nous proposant d'obtenir cette expression, nous démontrerons d'abord comme Liouville l'a reconnu le premier qu'il n'existe point de fonction doublement périodique holomorphe. Partons en effet de la formule générale:

$$f(x) = \Sigma A_m e^{\frac{2mi\pi x}{a}}$$

$$(m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\ldots)$$

qui représente toute fonction entière ayant pour période a. La condition $f(x+b) = f(x)$

donnera l'égalité

$$\Sigma A_m e^{\frac{2mi\pi b}{a}} . e^{\frac{2mi\pi x}{a}} = \Sigma A_m e^{\frac{2mi\pi x}{a}}$$

et on aura en égalant dans les deux membres les coefficients d'une même exponentielle :

$$A_m e^{\frac{2mi\pi b}{a}} = A_m$$

Nous en concluons que A_m est nul, car en supposant imaginaire ainsi qu'on le doit, le rapport $\frac{b}{a}$, on ne peut avoir $e^{\frac{2mi\pi b}{a}} = 1$ que pour la seule valeur $m = 0$. Le coefficient A_m devant être supposé nul pour toute valeur de m, sauf $m = 0$, on voit que $f(x)$ se réduit à la constante A_0

Ce résultat conduit à exprimer les fonctions à double période sous la forme fractionnaire :

$$f(x) = \frac{\Sigma B_n e^{\frac{2mi\pi x}{a}}}{\Sigma A_n e^{\frac{2ni\pi x}{a}}}$$

et à obtenir les coefficients du numérateur et du dénominateur comme conséquence de la condition

$$f(x+b) = f(x).$$

Posons pour abréger :

$$Q = e^{\frac{i\pi b}{a}}$$

nous écrirons cette egalité comme il suit :

$$\frac{\Sigma B_n e^{\frac{2mi\pi x}{a}}}{\Sigma A_n e^{\frac{2ni\pi x}{a}}} = \frac{\Sigma B_r Q^{2r} e^{\frac{2ri\pi x}{a}}}{\Sigma A_s Q^{2s} e^{\frac{2si\pi x}{a}}}$$

où m, n, r, s, parcourent toute la Série des entiers positifs et négatifs. Je chasserai ensuite les dénominateurs, afin d'égaler dans les deux membres les coefficients des mêmes exponentielles. On sera ainsi amené à l'équation suivante :

$$\Sigma B_m A_s Q^{2s} = \Sigma A_n B_r Q^{2r}$$

où les entiers variables doivent satisfaire à la condition

$$m + s = n + r.$$

Je me bornerai à un cas particulier qui suffira à l'objet que j'ai en vue ; je rendrai les séries identiques en les égalant terme à terme ; je poserai ainsi :

$$B_m A_s Q^{2s} = A_n B_r Q^{2r}$$

ou bien :

$$\frac{A_s}{A_n} Q^{2s} = \frac{B_r}{B_m} Q^{2r}.$$

Je ferai encore afin de satisfaire à la condition $m + s = n + r$:

$$s = n + k$$
$$r = m + k$$

en désignant par k un entier arbitraire.

L'égalité précédente prenant cette nouvelle forme :

$$\frac{A_{n+k}}{A_n} Q^{2n} = \frac{B_{m+k}}{B_m} Q^{2m}$$

où les entiers variables m et n sont indépendants l'un de l'autre, chaque membre est une quantité constante, de sorte que A_n et B_m sont deux solutions de cette même équation aux différences finies :

$$\frac{Z_{n+k}}{Z_n} Q^{2n} = Const.$$

On en tire :

$$Z_n = U_n Q^{-\frac{n^2}{k}+\alpha n}$$

α étant une constante arbitraire et U_n devant vérifier la condition

$$U_{n+k} = U_n .$$

Le numérateur et le dénominateur de $f(x)$ sont donc donnés par l'expression :

$$\Sigma\, U_m\, Q^{-\frac{m^2}{k}+\alpha m}\, e^{\frac{2mi\pi x}{a}}$$

$$(m = 0,\ \pm 2, \ldots\ldots)$$

en attribuant deux systèmes de valeurs aux constantes U_m, et nous remarquerons qu'en changeant x en $x + x_0$, on peut disposer de x_0 de manière à lui donner la forme plus simple :

$$\Sigma\, U_m\, Q^{-\frac{m^2}{k}}\, e^{\frac{2mi\pi x}{a}}$$

Ce résultat obtenu, une première question se présente, celle de la convergence de la Série; elle se traite facilement en la partageant en deux autres, l'une donnée par les valeurs positives de m, la seconde par les valeurs négatives. Soit pour un moment :

$$\frac{x}{a} = g + ih,$$

$$\frac{b}{a} = \alpha + i\beta,$$

afin de mettre en évidence les termes réels et imaginaires. On trouve pour les racines m^{es} des deux modules,

$$\sqrt[m]{Mod\, U_m}\ e^{\frac{m\pi\beta}{k} - 2\pi h},$$

$$\sqrt[m]{Mod\, U_m}\ e^{\frac{m\pi\beta}{k} + 2\pi h},$$

et l'on voit donc qu'en supposant l'entier arbitraire k, de signe contraire à β, c'est à dire négatif, ces quantités sont nulles pour m infini, les constantes U_m ayant des valeurs limitées, d'après la condition $U_{m+k} = U_m$.

Nous changerons d'après ce résultat k en $-k$.

Nous poserons aussi :

$$\Phi(x) = \Sigma A_m Q^{\frac{m^2}{k}} e^{\frac{2mi\pi x}{a}}$$

$$\Pi(x) = \Sigma B_m Q^{\frac{m^2}{k}} e^{\frac{2mi\pi x}{a}}$$

$$(m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\ldots)$$

en assujettissant les coefficients A_m et B_m, aux conditions

$$A_{m+k} = A_m, \quad B_{m+k} = B_m$$

et nous nous proposerons de faire l'étude des fonctions représentées par l'expression :

$$f(x) = \frac{\Pi(x)}{\Phi(x)}$$

où le numérateur et le dénominateur sont des séries convergentes dans tout le plan et par conséquent des fonctions holomorphes.

En cherchant en premier lieu de quelle manière se réalise la double périodicité dans le quotient, nous changerons x en $x+b$, par exemple dans $\Phi(x)$. On trouvera :

$$\Phi(x+b) = \Sigma A_m Q^{\frac{m^2}{k}} e^{\frac{2mi\pi(x+b)}{a}}$$

$$= \Sigma A_m Q^{\frac{m^2}{k}+2m} e^{\frac{2mi\pi x}{a}}.$$

Mais dans le terme général, il est permis de remplacer m par $m-k$, l'entier m devant prendre toutes les valeurs de $-\infty$ à $+\infty$. Cela étant et en faisant $A_{m-k} = A_m$, il vient successivement :

$$\Phi(x+b) = \Sigma A_m Q^{\frac{(m-k)^2}{k}+2(m-k)} e^{\frac{2(m-k)i\pi x}{a}}$$

$$= \Sigma A_m Q^{\frac{m^2}{k}-k} e^{\frac{2(m-k)i\pi x}{a}}$$

$$= Q^{-k} e^{-\frac{2ki\pi x}{a}} \Sigma A_m Q^{\frac{m^2}{k}} e^{\frac{2mi\pi x}{a}}$$

de sorte que la série primitive se reproduit multipliée par un certain facteur. Nous écrirons cette relation sous la forme suivante :

$$\Phi(x+b) = e^{-\frac{ki\pi(2x+b)}{a}} \Phi(x)$$

et en observant qu'elle a été obtenue sans rien supposer sur les coefficients A_m, nous aurons semblablement :

$$\Pi(x+b) = e^{-\frac{ki\pi(2x+b)}{a}} \Pi(x)$$

La double périodicité du quotient tient donc, à ce que les deux termes ayant la période a, ne font qu'acquérir un même facteur exponentiel, lorsqu'on y change x en $x+b$: Voici pour arriver à ce résultat une seconde méthode, imitée de celle qu'a employée Göpel, dans son célèbre mémoire intitulé: Theoriæ transcendentium Abelianarum primi ordinis Adumbratio levis (Journal de Crelle T. 35).

Soit à cet effet

$$\varphi(x) = e^{\frac{ki\pi x^2}{ab}};$$

je dis que le produit $\varphi(x)\Phi(x)$, qui a perdu la période a, a acquis la période b. En effet, on a:

$$\varphi(x)\Phi(x) = \Sigma A_m e^{i\pi\frac{b}{a}\frac{m^2}{k}+2mi\pi\frac{x}{a}+ki\pi\frac{x^2}{ab}}$$

$$= \Sigma A_m e^{\frac{ki\pi}{ab}\left(x+\frac{mb}{k}\right)^2}$$

$$= \Sigma A_m \varphi\left(x+\frac{mb}{k}\right).$$

Or, on peut changer dans le second membre m en $m+k$, attendu que la sommation s'étend à toutes les valeurs de m, de $-\infty$ à $+\infty$; cela étant, la condition $A_{m+k} = A_m$ nous permet d'écrire:

$$\varphi(x)\Phi(x) = \Sigma A_m \varphi\left(x+b+\frac{mb}{k}\right);$$

par conséquent $\varphi(x)\Phi(x)$ admet bien la période b. Il en est de même évidemment du produit $\varphi(x)\Pi(x)$, la multiplication par le même facteur $\varphi(x)$ suffit donc pour mettre en évidence la seconde période dans le quotient $\frac{\Pi(x)}{\Phi(x)}$. On remarquera que la relation:

$$\varphi(x+b)\,\Phi(x+b) = \varphi(x)\Phi(x),$$

donne:

$$\Phi(x+b) = \frac{\varphi(x)}{\varphi(x+b)}\Phi(x);$$

de sorte qu'ayant:

$$\varphi(x) = e^{\frac{ki\pi x^2}{ab}}$$

il vient:

$$\frac{\varphi(x)}{\varphi(x+b)} = e^{\frac{ki\pi}{ab}[x^2-(x+b)^2]} = e^{-\frac{ki\pi(2x+b)}{a}}$$

Nous avons donc comme précédemment

$$\Phi(x+b) = e^{-\frac{ki\pi(2x+b)}{a}}\Phi(x)$$

et plus généralement, n étant un entier quelconque:

$$\Phi(x+nb) = e^{-\frac{nki\pi(2x+nb)}{a}}\Phi(x).$$

Voici une première et importante application de la proposition que nous venons d'établir; nous allons montrer qu'elle donne facilement le nombre des racines de l'équation $\Phi(x) = 0$, qui sont contenues à l'intérieur du parallélogramme des périodes fig. 67.

Nous partirons de l'expression donnée par le théorème de Cauchy à savoir:

$$\mu = \frac{1}{2i\pi}\int\frac{\Phi'(z)}{\Phi(z)}dz,$$

l'intégrale étant prise en suivant le chemin PACB, de sorte que l'on aura :

$$\int \frac{\Phi'(z)}{\Phi(z)} dz = (PA) + (AC) - (PB) - (BC).$$

Soit p l'affixe du point P ; les côtés PA, PB, AC, BC du parallélogramme seront respectivement représentés par les égalités :

$$z = p + at,$$
$$z = p + bt,$$
$$z = p + a + bt,$$
$$z = p + b + at,$$

où t est une variable réelle que nous ferons croître de 0 à 1.

Posons pour un moment, afin d'abréger : $\frac{\Phi'(z)}{\Phi(z)} = f z$, nous tirerons de ces expressions :

$$(PA) - (BC) = a \int_0^1 [f(p+at) - f(p+b+at)] dt$$

et

$$(AC) - (PB) = b \int_0^1 [f(p+a+bt) - f(p+bt)] dt.$$

Or, $\Phi(z)$ admettant la période a, il en est de même de $f(z)$, et l'on en conclut :

$$(AC) - (PB) = 0.$$

Employons ensuite la relation :

$$\Phi(z+b) = e^{-\frac{ki\pi(2z+b)}{a}} \Phi(z).$$

on en conclut en prenant la dérivée logarithmique des deux membres :

$$f(z+b) = f(z) - \frac{2ki\pi}{a}$$

Nous avons donc :

$$f(p+at) - f(p+b+at) = \frac{2ki\pi}{a}$$

et par conséquent

$$(PA) - (BC) = 2ki\pi;$$

ce qui donne :

$$\mu = k.$$

L'équation $\Phi(z) = 0$ a ainsi k racines à l'intérieur du parallélogramme des périodes.

Dans le cas le plus simple, où $k = 1$, la fonction $\Phi(x)$ admet une racine et une seule dans ce contour. les coefficients A_m se réduisent alors à A_0, que nous supposerons égal à l'unité, et nous appellerons désormais $\chi(x)$ la fonction définie par la série :

$$\chi(x) = \Sigma\, Q^{m^2} e^{\frac{2mi\pi x}{a}}.$$

C'est à l'aide de cette fonction remarquable que nous allons obtenir avec la plus grande facilité l'expression analytique générale des fonctions doublement périodiques uniformes qui n'ont que des discontinuités polaires. Plus tard nous nous occuperons des fonctions doublement périodiques uniformes qui admettent des points essentiels.

Remarquons, en premier lieu qu'à l'intérieur du parallélogramme ayant l'origine comme sommet, la racine unique de l'équation $\chi(x) = 0$ est à l'intersection des diagonales et a pour affixe $\frac{a+b}{2}$. Ce résultat se présentera plus tard de lui-même ; mais il est facile de le vérifier dès maintenant.

On a en effet : $\quad \chi\left(\frac{a+b}{2}\right) = \Sigma\, (-1)^m Q^{m^2+m};$

à la place de m, mettons $-1-n$; comme la sommation s'étend de $m = -\infty$ à $m = +\infty$, le

résultat ne changera pas, et l'on obtient ainsi :

$$\Sigma(-1)^m Q^{m^2+m} = -\Sigma(-1)^n Q^{n^2+n}$$

La série étant à la fois égale et de signe contraire à elle-même, est nécessairement égale à zéro, il est ainsi démontré que $X(x)$ s'annule pour $x = \frac{a+b}{2}$ comme nous voulions l'établir.

Ajoutons qu'en alternant les signes dans $X(x)$, on obtient la série $\Theta(x)$ de Jacobi, qui joue un rôle considérable dans l'analyse, et s'était anciennement rencontrée dans les travaux de Fourier sur la théorie de la chaleur, comme M. Rosenham en a fait la remarque. Cet exemple montre avec bien d'autres la concordance des recherches de l'Analyse abstraite avec les applications du Calcul aux questions physiques. Les travaux des géomètres dans ces différentes directions sont, en effet, si étroitement liés qu'ils se rencontrent, malgré la diversité de leurs buts, dans les mêmes théories analytiques.

Arrivons maintenant à notre objet principal, qui est de donner l'expression analytique générale des fonctions uniformes aux périodes a et b, lorsqu'elles admettent seulement des discontinuités polaires.

Soit $c = \frac{a+b}{2}$, et posons :

$$Z(x-c) = \frac{X'(x)}{X(x)}$$

ou bien :

$$Z(x) = \frac{X'(x+c)}{X(x+c)}$$

$Z(x)$ est ainsi une fonction uniforme ayant le seul pôle simple $x=0$, dans le parallélogramme des périodes, et satisfaisant aux conditions :

$$Z(x+a) = Z(x)$$
$$Z(x+b) = Z(x) - \frac{2i\pi}{a}.$$

$Z(x+b)$ ne différant de $Z(x)$ que par une constante, on en conclut, $Z'(x+b) = Z'(x)$, $Z''(x+b) = Z''(x)$, ...; de sorte que les dérivées de la fonction $Z(x)$ admettent les deux périodes a et b.

Ceci posé, soit $F(z)$ une fonction uniforme aux périodes a et b, et qui à l'intérieur du parallélogramme PABC, n'a pour discontinuités que des pôles. En désignant par x l'affixe d'une variable qui reste à l'intérieur de ce parallélogramme, nous recourrons à la fonction suivante :

$$f(z) = F(z)\, Z(x-z).$$

Nous remarquerons d'abord qu'elle admet la période a, et qu'on obtient en changeant z en $z+b$,

$$f(z+b) = f(z) + \frac{2i\pi}{a} F(z)$$

d'après la relation :

$$Z(x-z-b) = Z(x-z) + \frac{2i\pi}{a}.$$

Considérons maintenant, l'intégrale $\int f(z)\,dz$ prise le long du contour PACB ; en opérant comme précédemment, nous trouverons facilement d'après ce qu'on vient de dire :

$$(PACB) = a\int -\frac{2i\pi}{a} F(p+at)\,dt = -2i\pi \int_0^1 F(p+at)\,dt.$$

D'autre part, l'intégrale a pour valeur le produit de $2i\pi$ par la somme S des résidus de $f(z)$ relatifs aux pôles de cette fonction situés à l'intérieur du contour ; l'expression

que l'on obtient ainsi

$$S = -\int_0^1 F(p+at)\,dt,$$

met en évidence ce résultat important que la somme des résidus est indépendante de x.

Nous allons en faire le calcul en observant que $f(z)$ a tous les pôles des fonctions $F(z)$ et $Z(x-z)$ situés à l'intérieur du parallélogramme PABC. Or $Z(x-z)$ admet le pôle $z=x$, et le résidu correspondant est $-F(x)$.

Soit ensuite, α un quelconque des pôles de $F(x)$, le résidu correspondant s'obtient en faisant $z=\alpha+h$, et développant $F(z)$ suivant les puissances croissantes de h. La partie principale comprenant les termes qui contiennent en dénominateur les puissances de h pourra se mettre sous la forme : $\frac{A}{h} + A_1 D_h\left(\frac{1}{h}\right) + A_2 D_h^2\left(\frac{1}{h}\right) + \cdots\cdots + A_n D_h^n\left(\frac{1}{h}\right)$,

ou bien : $\frac{A}{h} - A_1 \frac{1}{h^2} + A_2 \frac{1.2}{h^3} - \cdots\cdots + (-1)^n A_n \frac{1.2\ldots n}{h^n}$.

On a d'ailleurs :

$$Z(x-\alpha-h) = Z(x-\alpha) - \frac{h}{1} Z'(x-\alpha) + \cdots + (-1)^i \frac{h^i}{1.2\ldots i} Z^{(i)}(x-\alpha) + \cdots;$$

le résidu cherché, c'est-à-dire le coefficient de $\frac{1}{h}$ dans le développement de $F(\alpha+h)Z(x-\alpha-h)$ est par conséquent :

$$AZ(x-\alpha) + A_1 Z'(x-\alpha) + \cdots\cdots + A_n Z^{(n)}(x-\alpha).$$

En écrivant que la somme S est une constante C indépendante de x, nous obtenons la formule : $F(x) = C + \Sigma\,[AZ(x-\alpha) + A_1 Z'(x-\alpha) + \cdots\cdots A_n Z^{(n)}(x-\alpha)]$,

où la sommation s'étend à tous les pôles de $F(x)$ situés à l'intérieur du parallélogramme des périodes.

C'est donc l'expression analytique générale des fonctions uniformes admettant les deux périodes a et b et n'ayant que des discontinuités polaires, sous une forme qui offre la plus complète analogie avec celle des fractions rationnelles décomposées en fractions simples.

Voici les premières conséquences que nous allons en tirer.

Nous rechercherons d'abord comment la formule met en évidence la double périodicité de la fonction. Remarquant à cet effet qu'ayant :

$$Z(x+a) = Z(x),$$
$$Z(x+b) = Z(x) - \frac{2i\pi}{a},$$

on en conclut immédiatement :

$$F(x+a) = F(x),$$
$$F(x+b) = F(x) - \frac{2i\pi}{a}\,\Sigma A.$$

Il faut donc que la somme des résidus ΣA soit nulle, c'est là une proposition importante et d'un emploi continuel ; elle se démontre de la manière la plus simple et la plus directe en employant l'intégrale d'une fonction $f(z)$, effectuée en suivant le contour PABC. On a effectivement, comme on l'a établi plus haut :

$$(PABC) = a\int_0^1 [f(p+at) - f(p+b+at)]\,dt,$$
$$+\, b\int_0^1 [f(p+a+bt) - f(p+bt)]\,dt;$$

et si l'on remplace $f(z)$ par la fonction doublement périodique $F(z)$, le second membre

s'évanouit, ce qui démontre bien que la somme des résidus correspondant aux pôles situés à l'intérieur du parallélogramme est égale à zéro.

Cela posé, nous remarquons ainsi que nous l'avons précédemment établi, qu'il n'existe pas de fonction doublement périodique holomorphe; car notre formule se réduit à une constante dans la supposition qu'il n'y entre aucun pôle. Admettons ensuite un seul et unique pôle simple, on aurait alors:

$$F(x) = C + AZ(x-\alpha),$$

mais la relation $\Sigma A = 0$ donne alors $A = 0$, et dans cette hypothèse la fonction ne peut être encore qu'une constante.

Il est donc nécessaire, comme l'a reconnu pour la première fois Liouville, que toute fonction doublement périodique $F(x)$ ait au moins deux pôles simples ou un pôle double. C'est le premier de ces cas particuliers qui nous donnera plus tard les fonctions inverses des intégrales elliptiques.

23ème Leçon.

L'expression générale des fonctions doublement périodiques au moyen d'une somme d'éléments simples mettant les pôles en évidence est bien différente de leur représentation par la formule: $f(x) = \dfrac{\Pi(x)}{\Phi(x)}$ qui a été notre point de départ. Nous allons montrer que cette formule peut être établie directement et indépendamment de l'expression générale, en employant la méthode de la 11me leçon, page 92, qui nous a donné l'expression des fonctions uniformes, lorsqu'elles n'ont que des discontinuités polaires, par le quotient de deux fonctions holomorphes. A cet effet je rappelle que la série, $\Phi(x) = \Sigma A_m Q^{\frac{m^2}{k}} e^{\frac{2mi\pi x}{a}}$ contenant sous forme homogène k coefficients arbitraires, d'après la condition $A_{m+k} = A_m$, on peut en disposer de manière que l'équation $\Phi(x) = 0$, admette $k-1$ racines données, simples ou multiples dans le parallélogramme des périodes. Prenons pour ces racines les pôles de la fonction doublement périodique $f(x)$, que nous supposerons en nombre égal à $k-1$, la quantité $\Phi(x) f(x)$ sera une fonction holomorphe et nous allons montrer comment on peut en obtenir l'expression. Je remarque pour cela qu'en multipliant $\Phi(x)$ par une fonction aux périodes a et b, le produit vérifie encore ces relations caractéristiques précédemment établies:

$$\Phi(x+a) = \Phi(x)$$
$$\Phi(x+b) = \Phi(x) e^{-\frac{k i\pi}{a}(2x+b)}$$

Nous sommes donc conduit à rechercher l'expression la plus générale des fonctions entières qui satisfont à ces deux conditions. Voici comment on y parvient.

La première, d'après la formule de Fourier donne d'abord:

$$\Phi(x) = \Sigma a_m e^{\frac{2mi\pi x}{a}}$$

$$(m = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots\ldots)$$

Remplaçons les coefficients a_m par $A_m Q^{\frac{m^2}{k}}$, en considérant les quantités A_m comme de nouvelles indéterminées, de sorte qu'on ait:

$$\Phi(x) = \Sigma A_m Q^{\frac{m^2}{k}} e^{\frac{2mi\pi x}{a}}.$$

Nous conclurons de là:

$$\Phi(x+b) = \Sigma A_m Q^{\frac{m^2}{k}+2m} e^{\frac{2mi\pi x}{a}},$$

et par conséquent:

$$\Phi(x+b) e^{\frac{ki\pi(2x+b)}{a}} = \Sigma A_m Q^{\frac{m^2}{k}+2m+k} e^{\frac{2(m+k)i\pi x}{a}}.$$

Mettons maintenant $m-k$ au lieu de m, ce qui est permis puisque m parcourt la série des nombres entiers de $-\infty$ à $+\infty$, et remarquons que l'exposant de Q est, $\frac{(m+k)^2}{k}$, on conclura de notre seconde relation:

$$\Phi(x) = \Sigma A_{m-k} Q^{\frac{m^2}{k}} e^{\frac{2mi\pi x}{a}}.$$

Cette expression rapprochée de la première, conduit à la relation $A_{m-k} = A_m$, ou bien $A_{m+k} = A_m$; nous nous trouvons donc ramené précisément à l'expression définie au début de notre étude des fonctions doublement périodiques, et l'on voit ainsi que le produit holomorphe $\Phi(x) f(x)$, ne diffère de $\Phi(x)$ que par le système des coefficients A_m. Nous pouvons par conséquent poser

$$\Phi(x) f(x) = \Pi(x);$$

il en résulte que la formule $f(x) = \frac{\Pi(x)}{\Phi(x)}$, est bien comme nous voulions l'établir, l'expression analytique générale des fonctions uniformes, admettant les périodes a et b, lorsqu'elles n'ont que des discontinuités polaires.

Beaucoup de conséquences importantes découlent de la solution générale des équations:

$$\Phi(x+a) = \Phi(x)$$

$$\Phi(x+b) = \Phi(x) e^{-\frac{ki\pi(2x+b)}{a}}$$

par des fonctions holomorphes, j'indiquerai immédiatement la suivante. Nous avons remarqué précédemment qu'on pouvait introduire une nouvelle constante arbitraire dans l'expression $\frac{\Pi(x)}{\Phi(x)}$, en changeant x en $x+g$, je dis qu'en multipliant par $\chi(x-kg)$ les deux termes du quotient $\frac{\Pi(x+g)}{\Phi(x+g)}$, on le ramène à la forme analytique $\frac{\Pi_1(x)}{\Phi_1(x)}$ où le nombre k est changé en $K+1$

Soit en effet:

$$\Pi_1(x) = \Pi(x)\chi(x-Kg),$$

$$\Phi_1(x) = \Phi(x)\chi(x-Kg),$$

ces deux produits ont pour période a, et au moyen de la relation:

$$\chi(x+b) = \chi(x) e^{-\frac{i\pi(2x+b)}{a}}$$

on vérifie immédiatement que l'on a

$$\Pi_1(x+b) = \Pi_1(x) e^{-\frac{i\pi(k+1)(2x+b)}{a}}$$

$$\Phi_1(x+b) = \Phi_1(x) e^{-\frac{i\pi(k+1)(2x+b)}{a}}$$

et ces relations démontrent le résultat annoncé.

La remarque que nous venons de faire conduit par une extension qui s'offre d'elle-même à considérer l'expression :

$$f(x)=\frac{\Pi\,(x+g)}{\Phi\,(x+h)}$$

où g et h sont deux constantes différentes. On a alors les conditions :

$$f(x+a)=f(x)$$
$$f(x+b)=f(x)e^{\frac{-2i\pi k(g-h)}{a}}$$

et l'on sort par conséquent du domaine des fonctions doublement périodiques. Mais ces nouvelles transcendantes sont étroitement liées aux précédentes. D'importantes questions de mécanique, comme la rotation d'un corps autour d'un point fixe, lorsqu'il n'y a pas de forces accélératrices, le pendule sphérique, etc. ont montré qu'elles les accompagnent dans beaucoup de circonstances, et qu'il est devenu nécessaire de les comprendre dans la théorie des fonctions elliptiques. Nous donnerons en général la désignation de fonctions doublement périodiques de seconde espèce, aux fonctions uniformes qui satisfont aux relations suivantes :

$$f(x+a)=\mu f(x)$$
$$f(x+b)=\mu' f(x)$$

où μ et μ' sont des facteurs constants. En supposant $\mu=1$, $\mu'=1$, nous rentrerons donc dans la catégorie des fonctions doublement périodiques, proprement dites, que nous nommerons alors, de première espèce. Cela étant, un premier mode d'expression analytique nous est offert par la formule

$$f(x)=\frac{\Pi(x+g)\,e^{\lambda x}}{\Phi\,(x+h)},$$

les constantes λ et $g-h$ pouvant être déterminées de telle sorte que les multiplicateurs μ et μ' aient des valeurs données. On a en effet :

$$f(x+a)=\mu f(x)$$
$$f(x+b)=\mu' f(x),$$

en posant :

$$\mu=e^{\lambda a}$$
$$\mu=e^{\lambda b-\frac{2i\pi k(g-h)}{a}}$$

et de ces équations on conclut immédiatement

$$\lambda\, a=\log\mu$$
$$2Ki\pi(g-h)=b\log\mu-a\log\mu'.$$

J'établirai maintenant que l'expression précédente représente de la manière la plus générale les fonctions uniformes doublement périodiques de seconde espèce, lorsqu'elles n'ont que des discontinuités polaires

Considérons dans ce but le cas particulier de $k=1$; les quantités $\Pi\,(x)$ et $\Phi\,(x)$ coincident alors, sauf un facteur constant avec $\chi\,(x)$ la fonction qui se réduit à $\frac{\chi\,(x+g)\,e^{\lambda x}}{R\,\chi\,(x+h)}$, en désignant par R une constante, n'aura qu'un seul pôle dans le parallélogramme des périodes.

Posons $h=\frac{a+b}{2}=c$, de sorte que ce pôle unique soit $x=0$ soit aussi $g=c+\omega$, et prenons pour les constantes λ et ω, d'après les formules précédentes en faisant $K=1$:

ce qui donnera :

$$\lambda a = \log \mu$$
$$2 i \pi \omega = b \log \mu - a \log \mu'.$$

Je supposerai enfin que le résidu correspondant à la valeur $x = 0$, soit égal à l'unité, de sorte qu'on ait :

$$R = \frac{\chi(c+\omega)}{\chi'(c)},$$

cela étant, je vais montrer que la fonction ainsi obtenue joue à l'égard de $f(x)$ le rôle d'élément simple.

Soit à cet effet

$$\psi(x) = \frac{\chi(x+c+\omega)e^{\lambda x}}{R\chi(x+c)},$$

j'envisage le produit :

$$F(z) = f(z)\ \psi(x-z)$$

et je remarque que des relations

$$\psi(z+a) = \mu\ \psi(z)$$
$$\psi(z+b) = \mu'\ \psi(z),$$

on conclut :

$$\psi(z-a) = \frac{1}{\mu}\ \psi(z)$$
$$\psi(z-b) = \frac{1}{\mu'}\ \psi(z),$$

et par conséquent :

$$\psi(z-x-a) = \frac{1}{\mu}\ \psi(x-z)$$
$$\psi(x-z-b) = \frac{1}{\mu'}\ \psi(x-z)$$

De là résulte que $F(z)$ est une fonction doublement périodique de première espèce, pour laquelle la somme des résidus correspondant aux pôles qui sont à l'intérieur du parallélogramme des périodes, est nulle comme nous l'avons démontré. De ces résidus l'un qui se rapporte à la valeur $z = x$, a pour expression $-f(x)$, d'après ce qu'on a supposé à l'égard de $\psi(x)$. Désignons ensuite par $z = a$, un pôle quelconque de $f(z)$, et soit en nous bornant à la partie principale du développement suivant les puissances croissantes de h :

$$f(a+h) = \frac{A}{h} + A_1 D_h\left(\frac{1}{h}\right) + \cdots\cdots + A_n D_h^n\left(\frac{1}{h}\right);$$

un calcul qui a été déjà fait, donne pour résidu de $F(z)$, correspondant à $z=a$, la quantité :

$$A\ \psi(x-a) + A_1\ \psi'(x-a) \cdots\cdots + A_n\ \psi^n(x-a).$$

Nous avons par conséquent la relation suivante :

$$-f(x) + \Sigma[A\ \psi(x-a) + A_1\ \psi'(x-a) + \cdots + A_n\ \psi^n(x-a)] = 0$$

où le signe Σ se rapporte à tous les pôles de $f(x)$, et l'on en conclut l'expression générale des fonctions de seconde espèce, sous forme d'une somme d'éléments simples, à savoir :

$$f(x) = \Sigma[A\ \psi(x-a) + A_1\ \psi'(x-a) + \cdots + A_n\ \psi^n(x-a)]$$

Une seconde expression par le quotient de deux fonctions holomorphes, s'obtient de la manière suivante.

Désignons par $k-1$ le nombre des pôles, et soit comme tout à l'heure, $\Phi(x)$ la fonction holomorphe définie par les relations:

$$\Phi(x+a)=\Phi(x)$$
$$\Phi(x+b)=\Phi(x)e^{-\frac{i\pi k(2x+b)}{a}}$$

qui admet pour racines les divers pôles de $f(x)$. Nous représenterons le produit $\Phi(x)f(x)$ qui sera nécessairement holomorphe, par l'expression $\Pi(x+l)e^{\lambda x}$, où l est une constante indéterminée, et nous nous proposons d'obtenir la fonction $\Pi(x)$. Pour cela je remarque qu'en changeant x en $x+a$, la condition $\mu=e^{\lambda a}$, nous donne d'abord:

$$\Pi(x+l+a)=\Pi(x+l)$$

et par conséquent:

$$\Pi(x+a)=\Pi(x).$$

Remplaçons ensuite x par $x+b$, on aura ainsi:

$$\Pi(x+l+b)e^{\lambda(x+b)}=\Phi(x+b)f(x+b)$$
$$=\mu'\Phi(x)f(x)e^{-\frac{i\pi k(2x+b)}{a}}$$

C'est-à-dire:

$$\Pi(x+l+b)=\mu'\Pi(x+l)e^{-\frac{i\pi k(2x+b)}{a}-\lambda b}$$

ou encore:

$$\Pi(x+b)=\mu'\Pi(x)e^{-\frac{i\pi k(2x+b)}{a}+\frac{2kli\pi}{a}-\lambda b}$$

Soit maintenant:

$$\mu' e^{\frac{2kli\pi}{a}-\lambda b}=1;$$

nous obtenons en disposant de la constante l, par cette condition, les relations:

$$\Pi(x+a)=\Pi(x)$$
$$\Pi(x+b)=\Pi(x)e^{-\frac{i\pi k(2x+b)}{a}}$$

qui déterminent comme on voit la fonction $\Pi(x)$. On a donc l'expression à laquelle nous voulions parvenir:

$$f(x)=\frac{\Pi(x+l)e^{\lambda x}}{\Phi(x)};$$

c'est la formule qui a été prise pour point de départ de l'étude des fonctions doublement périodiques de seconde espèce, en y supposant nulle la constante k.

Je reviendrai un moment sur la première expression de ces transcendantes par une somme d'éléments simples:

$$f(x)=\Sigma[\psi(x-a)+A_1\psi'(x-a)+\cdots A_n\psi(x-a)]$$

pour y introduire la supposition de $\lambda=0$, $\omega=0$, qui réduit les multiplicateurs μ et μ' à l'unité. La formule dans ce cas particulier, semble tout d'abord illusoire; la quantité

$$R=\frac{\chi(c+\omega)}{\chi'(c)}$$

devenant nulle, et la fonction $\psi(x)$ infinie. Cette circonstance est l'annonce d'un changement de forme analytique, qui s'obtient facilement, si après avoir fait $\lambda=0$, ce qui donne:

$$\psi(x)=\frac{\chi(x+c+\omega)}{R\,\chi(x+c)},$$

on suppose ω infiniment petit. Ayant en effet par la série de Taylor:

$$\chi(c+\omega)=\omega\chi'(c)+\frac{\omega}{2}\chi''(c)+\cdots\cdots$$

on peut écrire en désignant par $p, q, \ldots$ des coefficients constants:

$$\frac{X'(c)}{X(c+\omega)} = \frac{1}{\omega} + p + \omega q + \ldots\ldots$$

Employons aussi cet autre développement suivant les puissances de ω:

$$\frac{X(x+c+\omega)}{X(x+c)} = 1 + \omega \frac{X'(x+c)}{X(x+c)} + \ldots\ldots$$

nous aurons en multipliant membre à membre:

$$\frac{X(x+c+\omega)X'(c)}{X(x+c)X(c+\omega)} = \psi(x)$$

$$= \frac{1}{\omega} + \frac{X'(x+c)}{X(x+c)} + p + \ldots\ldots$$

les termes non écrits contenant ω en facteur.

J'observe enfin que les coefficients A, A_1, etc. étant fonction de ω, la série de Taylor donne pour A qui est seul à considérer, l'expression:

$$A = A_0 + \omega A'_0 + \frac{\omega}{2} A''_0 + \ldots\ldots$$

Nous avons donc:

$$A\psi(x) = \frac{A_0}{\omega} + A_0 \frac{X'(x+c)}{X(x+c)} + A_0 p + A'_0 + \ldots\ldots$$

ou encore, en remplaçant $A_0 p + A'$ par une nouvelle constante C, et introduisant la fonction $Z(x)$:

$$A\psi(x) = \frac{A_0}{\omega} + A Z(x) + C + \ldots\ldots$$

Cette formule où ont été négligés les termes qui sont multipliés par ω donne ensuite pour $\omega = 0$:

$$\psi'(x) = Z'(x)$$

$$\psi''(x) = Z''(x).$$

Nous en concluons d'abord:

$$\Sigma A \psi(x-a) = \frac{1}{\omega} \Sigma A_0 + \Sigma A_0 Z(x-a) + \text{Const}^{e}$$

et l'on voit que le terme en $\frac{1}{\omega}$ disparaît dans le second membre, les quantités A_0 ayant une somme nulle, comme résidus d'une fonction doublement périodique proprement dite; il vient donc à la limite pour $\omega = 0$:

$$\Sigma A \psi(x-a) = \Sigma A_0 Z(x-a) + \text{Const}^{e}$$

Et à l'égard des dérivées $\psi'(x-c)$, $\psi''(x-c)$, ... elles se réduisent immédiatement à $Z'(x-c)$, $Z''(x-c)$, etc.; ce qui donne bien la formule propre aux fonctions de première espèce qu'il s'agissait d'obtenir.

La théorie des fonctions de première et de seconde espèce présente un point commun qui doit maintenant appeler notre attention. Si l'on désigne par $f(x)$ l'une ou l'autre de ces transcendantes, on remarquera que la dérivée logarithmique $\frac{f'(x)}{f(x)}$ est une fonction doublement périodique de première espèce, et nous allons voir que son expression par une somme d'éléments simples conduit à une conséquence importante: Soit pour un moment: $f(x) = \frac{Q(x)}{P(x)}$, en supposant le numérateur et le dénominateur holomorphes; désignons par $p_1, p_2, \ldots\ldots p_m$, les racines de l'équation $P(x) = 0$ qui sont à l'intérieur

du parallélogramme des périodes, et par $q_1, q_2, \ldots\ldots q_n$, celles de l'équation $Q(x)=0$. La relation :

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = D_x \log Q(x) - D_x \log P(x)$$

montre que ces quantités p et q sont les pôles de la dérivée logarithmique et que les résidus correspondants sont respectivement -1 et $+1$, en admettant que ces diverses racines soient simples. Cela étant nous avons l'expression suivante, où λ est une constante:

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \lambda + Z(x-p_1) + \cdots + Z(x-p_m) - Z(x-q_1) \cdots - Z(x-q_n);$$

et nous rappelant que :

$$Z(x) = \frac{\chi'(x+c)}{\chi(x+c)},$$

nous l'écrirons ainsi :

$$\frac{f'(x-c)}{f(x-c)} = \lambda + \frac{\chi'(x-q_1)}{\chi(x-q_1)} + \cdots + \frac{\chi'(x-q_m)}{\chi(x-q_m)}$$

$$- \frac{\chi'(x-p_1)}{\chi(x-p_1)} - \cdots - \frac{\chi(x-p_n)}{\chi(x-p_n)}$$

Si l'on intègre les deux membres, on en conclut en désignant par λ_0 une constante:

$$\chi(x-c) = \frac{\chi(x-q_1)\,\chi(x-q_2)\ldots\chi(x-q_m)}{\chi(x-p_1)\,\chi(x-p_2)\ldots\chi(x-p_n)}\, e^{\lambda x + \lambda_0},$$

Et il est clair que ce résultat subsiste sans changement de forme analytique, lorsque les racines p et q ne sont plus supposées inégales. Voici maintenant une première remarque : Je dis que les quantités p et q sont en même nombre ; en effet la somme des résidus de la fonction de première espèce $\frac{f'(x)}{f(x)}$ étant nulle on a la condition $m-n=0$. Voici en second lieu comment s'obtiennent les multiplicateurs μ et μ', de $f(x)$; soit pour abréger:

$$s = p_1 + p_2 + \cdots + p_n$$
$$t = q_1 + q_2 + \cdots\cdots + q_n$$

et posons:

$$P(x) = \chi(x-p_1)\,\chi(x-p_2)\cdots\cdots\chi(x-p_n)$$
$$\Phi(x) = \chi(x-q_1)\,\chi(x-q_2)\ldots\ldots\chi(x-q_n).$$

Des relations fondamentales:

$$\chi(x+a) = \chi(x)$$
$$\chi(x+b) = \chi(x)\, e^{-\frac{2i\pi(2x+b)}{a}}$$

on conclut que $P(x)$ et $Q(x)$ admettant la période a, on a en outre :

$$P(x+b) = P(x)\, e^{-\frac{i\pi n(2x+b)}{a} + \frac{2i\pi s}{a}}$$

$$Q(x+b) = Q(x)\, e^{-\frac{i\pi n(2x+b)}{a} + \frac{2i\pi t}{a}}$$

Nous voyons par là que ces fonctions se ramènent à $\Phi(x)$, en changeant dans la première x en $x+\frac{s}{n}$, et dans la seconde x en $x+\frac{t}{n}$. Nous obtenons ensuite au moyen de la formule : $f(x-c) = \frac{Q(x)\, e^{\lambda x + \lambda_0}}{P(x)}$ les valeurs cherchées : $\mu = e^{\lambda a}$

$\mu' = e^{\lambda b - \frac{2i\pi(s-t)}{a}}$

Éliminons entre ces deux équations la constante λ, on est conduit à l'importante relation que voici :

$$2i\pi(s-t) = b\log\mu - a\log\mu';$$

elle montre qu'aux multiples près des périodes a et b, la différence $s-t$ est déterminée par les multiplicateurs μ et μ'. [1]

Soit en particulier $\mu = 1$, $\mu' = 1$, on aura dans le cas des fonctions de première espèce :

$$s-t = mb - na,$$

m et n étant des nombres entiers, théorème donné pour la première fois par Liouville dans ses leçons au collège de France. Supposons ensuite, en passant aux trois fonctions de seconde espèce : ayant les mêmes multiplicateurs que $\operatorname{sn} x$, $\operatorname{cn} x$, $\operatorname{dn} x$:

$$\begin{cases}\mu = -1\\ \mu' = +1\end{cases} \qquad \begin{cases}\mu = -1\\ \mu' = -1\end{cases} \qquad \begin{cases}\mu = 1\\ \mu' = -1\end{cases}$$

nous trouverons successivement :

$$\begin{aligned}2(s-t) &= (2m+1)b - 2na\\ &= (2m+1)b - (2m'+1)a\\ &= 2nb - (2m'+1)a\end{aligned}$$

24ème Leçon.

Les résultats que nous venons d'obtenir permettent d'aborder maintenant la question fondamentale de la théorie des fonctions elliptiques. Nous nous proposons d'obtenir la fonction de la variable x, définie par la relation :

$$\int_0^z \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}} = x;$$

c'est le problème de l'inversion de l'intégrale elliptique ; nous le traiterons en supposant d'abord le module k réel et moindre que l'unité, puis dans le cas général où le module a une valeur réelle ou imaginaire quelconque.

Revenant dans ce but à notre expression des fonctions doublement périodiques par la formule $f(x) = \frac{\Pi(x)}{\Phi(x)}$, nous considérerons le cas le plus simple qu'elle présente et qu'on obtient en supposant $k = 2$. Pour $k = 1$, on se rappelle en effet qu'on a :

$$\Phi(x) = A\,\mathrm{X}(x) \quad \text{et} \quad \Pi(x) = B\,\mathrm{X}(x),$$

---

[1] Ce résultat que j'ai donné dans mes leçons en 1885, avait été obtenu par Mr Gegenbauer, professeur à l'université d'Inspruck et publié par le savant géomètre dans les Sitzungberichte de l'Académie Impériale des Sciences de Vienne, de la même année.

de sorte que le rapport des deux fonctions est une constante. Pour ce cas de $K=2$, les coefficients A_m dans la série

$$\Phi(x) = \Sigma A_m\, Q^{\frac{m^2}{2}\frac{2 m i \pi x}{a}}$$

ont seulement deux valeurs distinctes. A_0 si m est pair, A_1 si m est impair ; de sorte qu'on peut écrire :

$$\Phi(x) = A_0 \Sigma Q^{2m^2} e^{\frac{4 m i \pi x}{a}} + A_1 \Sigma Q^{\frac{(2m+1)^2}{2}} e^{\frac{(4m+2) i \pi x}{a}}$$

Posons afin d'obtenir les notations de Jacobi :

$$a = 4K \quad , \qquad b = 2i K' ;$$

puis :

$$q = e^{-\frac{\pi K'}{K}}$$

ce qui donnera :

$$Q = q^{\frac{1}{2}} .$$

La première des deux séries dont la somme compose $\Phi(x)$ devenant ainsi :

$$A_0 \Sigma q^{m^2} e^{\frac{m i \pi x}{K}} ;$$

nous ferons :

$$\Theta_1(x) = \Sigma q^{m^2} e^{\frac{m i \pi x}{K}} .$$

On observera que si l'on réunit les termes correspondant aux valeurs de m égales et de signe contraire, on peut écrire :

$$\Theta_1(x) = 1 + 2q \cos\frac{\pi x}{K} + 2q^4 \cos\frac{2\pi x}{K} + 2q^9 \cos\frac{3\pi x}{K} + \cdots ,$$

ou bien encore :

$$\Theta_1\left(\frac{2Kx}{\pi}\right) = 1 + 2q\cos 2x + 2q^4 \cos 4x + 2q^9 \cos 6x + \cdots$$

La seconde série étant :

$$A_1 \Sigma q^{\frac{(2m+1)^2}{4}} e^{\frac{(2m+1) i \pi x}{2K}}$$

nous poserons :

$$H_1(x) = \Sigma q^{\frac{(2m+1)^2}{4}} e^{\frac{(2m+1) i \pi x}{2K}} ,$$

nous réunirons ensuite les termes en m et $-m-1$; on aura ainsi :

$$H_1(x) = 2\sqrt[4]{q} \cos\frac{\pi x}{2K} + 2\sqrt[4]{q^9} \cos\frac{3\pi x}{2K} + 2\sqrt[4]{q^{25}} \cos\frac{5\pi x}{2K} + \cdots ,$$

d'où :

$$H_1\left(\frac{2Kx}{\pi}\right) = 2\sqrt[4]{q}\cos x + 2\sqrt[4]{q^9}\cos 3x + 2\sqrt[4]{q^{25}}\cos 5x + \cdots$$

De même qu'à $\sin x$ et $\operatorname{tg} x$ on associe $\cos x$ et $\operatorname{cotg} x$, nous joindrons aux fonctions Θ_1 et H_1 les suivantes :

$$\Theta_1(K-x) = \Theta(x) .$$
$$H_1(K-x) = H(x) .$$

Elles s'expriment comme il suit :

$$\Theta\left(\frac{2Kx}{\pi}\right) = 1 - 2q\cos 2x + 2q^4\cos 4x - 2q^9 \cos 6x + \cdots$$
$$H\left(\frac{2Kx}{\pi}\right) = 2\sqrt[4]{q}\sin x - 2\sqrt[4]{q^9}\sin 3x + 2\sqrt[4]{q^{25}}\sin 5x + \cdots$$

Ces fonctions Θ_1, H_1, Θ, H, dont les trois premières sont paires et la dernière impaire, sont les transcendantes de Jacobi, à l'aide desquelles nous allons résoudre le problème que nous avons en vue de l'inversion de l'intégrale elliptique de première espèce.

En premier lieu, nous établirons les relations fondamentales auxquelles elles conduisent lorsqu'on ajoute à la variable les quantités K, iK', $K+iK'$.

Nous avons d'abord immédiatement :

$$\begin{aligned} \Theta_1(x+K) &= +\Theta(x), \\ H_1(x+K) &= -H(x), \\ \Theta(x+K) &= +\Theta_1(x), \\ H(x+K) &= +H_1(x), \end{aligned}$$

Reprenons ensuite la fonction $\varphi(x) = e^{\frac{Ki\pi x^2}{ab}}$ qui devient dans le cas présent $e^{-\frac{\pi x^2}{4KK'}}$; d'après ce que nous avons vu plus haut, elle permet d'écrire,

$$\begin{aligned} \varphi(x)\Theta_1(x) &= \Sigma\varphi(x+2miK') \\ \varphi(x)H_1(x) &= \Sigma\varphi[x+(2m+1)iK']. \end{aligned}$$

$$(m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

Cela étant il suffit de changer x en $x+iK'$ pour obtenir les relations :

$$\begin{aligned} \varphi(x+iK')\Theta_1(x+iK') &= \varphi(x)H_1(x) \\ \varphi(x+iK')H_1(x+iK') &= \varphi(x)\Theta_1(x). \end{aligned}$$

En faisant pour abréger :

$$\frac{\varphi(x)}{\varphi(x+iK')} = e^{\frac{-i\pi}{4K}(2x+iK')} = \lambda,$$

on a ainsi :

$$\begin{aligned} \Theta_1(x+iK') &= \lambda H_1(x), \\ H_1(x+iK') &= \lambda\Theta_1(x). \end{aligned}$$

Mettons ensuite $x+K$ au lieu de x, et remarquons que λ se change en $\lambda e^{\frac{-i\pi}{2}} = -i\lambda$, nous en conclurons :

$$\begin{aligned} \Theta(x+iK') &= i\lambda H(x), \\ H(x+iK') &= i\lambda\Theta(x). \end{aligned}$$

Le second système de relations est donc :

$$\begin{aligned} \Theta_1(x+iK') &= \lambda H_1(x) \\ H_1(x+iK') &= \lambda\Theta_1(x), \\ \Theta(x+iK') &= i\lambda H(x), \\ H(x+iK') &= i\lambda\Theta(x). \end{aligned}$$

Le troisième s'en déduit en changeant x en $x+K$; nous obtenons ainsi :

$$\begin{aligned} \Theta_1(x+K+iK') &= i\lambda H(x), \\ H_1(x+K+iK') &= -i\lambda\Theta(x), \\ \Theta(x+K+iK') &= \lambda H_1(x), \\ H(x+K+iK') &= \lambda\Theta_1(x). \end{aligned}$$

Désignons enfin λ_1, ce que devient λ quand on change x en $x+iK'$, c'est-à-dire : $\lambda_1 = e^{\frac{-i\pi}{4K}(2x+3iK')}$, et posons :

$$\mu = \lambda\lambda_1 = e^{\frac{-i\pi}{K}(x+iK')};$$

on conclut des équations du second système, en changeant x en $x+iK'$:

$$\Theta_1(x+2iK')=+\mu\ \Theta_1(x),$$
$$H_1(x+2iK')=+\mu\ H_1(x),$$
$$\Theta(x+2iK')=-\mu\ \Theta(x),$$
$$H(x+2iK')=-\mu\ H(x).$$

Ce sont là les relations fondamentales entre les quatres transcendantes de Jacobi.

L'expression générale des racines des équations que l'on obtient en égalant à zéro ces fonctions est la première conséquence à en tirer. Une seule d'entre elles $H(x)$ est impaire, et par suite admet la racine $x=0$, c'est de là que nous conclurons le résultat que nous avons en vue.

On a en effet:

$$H(x+2K)=-H(x),$$
$$H(x+2iK')=-\mu H(x);$$

il en résulte de proche en proche que la fonction s'annule en faisant:

$$x=2mK+2m'iK',$$

m et m' étant deux entiers quelconques, cette formule représente toutes les racines de l'équation $H(x)=0$. Si l'on fait, en effet, pour un moment: $a=2K$, $b=2iK'$, on a:

$$\frac{H'(x+a)}{H(x+a)}=\frac{H'(x)}{H(x)},\quad \frac{H(x+b)}{H(x+b)}=\frac{H'(x)}{H(x)}-\frac{2i\pi}{a},$$

et ces relations prouvent, comme nous l'avons précédemment fait voir p. 224, que l'équation proposée n'a qu'une seule racine à l'intérieur du parallélogramme des périodes représentées par $2K$ et $2iK'$.

Cela étant, on déduit des formules:

$$\Theta_1(x+K+iK')=+i\lambda H(x)$$
$$H_1(x+K)=-H(x),$$
$$\Theta(x+iK')=+i\lambda H(x),$$

que les racines de $\Theta_1(x)=0$, $H_1(x)=0$, $\Theta(x)=0$, sont respectivement:

$$x=(2m+1)K+(2m'+1)iK',$$
$$x=(2m+1)K+2m'iK',$$
$$x=2mK+(2m'+1)iK'.$$

Ce point établi, voici la définition des fonctions doublement périodiques qui conduisent à l'expression de la fonction inverse de l'intégrale elliptique de première espèce.

En introduisant les constantes:

$$\sqrt{k}=\frac{H_1(0)}{\Theta_1(0)}=\frac{2\sqrt[4]{q}+2\sqrt[4]{q^9}+\cdots\cdots}{1+2q+2q^4+\cdots\cdots},$$

$$\sqrt{k'}=\frac{\Theta(0)}{\Theta_1(0)}=\frac{1-2q+2q^4-\cdots\cdots}{1+2q+2q^4+\cdots\cdots};$$

nous les désignerons ainsi :

$$\operatorname{sn} x = \frac{1}{\sqrt{k}} \frac{H(x)}{\Theta(x)}$$

$$\operatorname{cn} x = \sqrt{\frac{k'}{k}} \frac{H_1(x)}{\Theta(x)},$$

$$\operatorname{dn} x = \sqrt{k'} \frac{\Theta_1(x)}{\Theta(x)}.$$

La double périodicité de ces fonctions résulte des équations établies précédemment entre H_1, Θ_1, H, Θ.

On obtient en premier lieu :

$$\begin{cases} \operatorname{sn}(x+K) = \dfrac{\operatorname{cn} x}{\operatorname{dn} x} \\ \operatorname{cn}(x+K) = -\dfrac{k' \operatorname{sn} x}{\operatorname{dn} x} \\ \operatorname{dn}(x+K) = \dfrac{k'}{\operatorname{dn} x} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \operatorname{sn}(x+iK') = \dfrac{1}{k \operatorname{sn} x} \\ \operatorname{cn}(x+iK') = \dfrac{\operatorname{dn} x}{i \operatorname{sn} x} \\ \operatorname{dn}(x+iK') = \dfrac{\operatorname{cn} x}{i \operatorname{sn} x} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \operatorname{sn}(x+K+iK') = \dfrac{\operatorname{dn} x}{k \operatorname{cn} x} \\ \operatorname{cn}(x+K+iK') = \dfrac{k'}{ik \operatorname{cn} x} \\ \operatorname{dn}(x+K+iK') = \dfrac{ik' \operatorname{sn} x}{\operatorname{cn} x} \end{cases}$$

Nous avons ensuite :

$$\begin{cases} \operatorname{sn}(x+2K) = -\operatorname{sn} x \\ \operatorname{cn}(x+2K) = -\operatorname{cn} x \\ \operatorname{dn}(x+2K) = +\operatorname{dn} x \end{cases}$$

$$\begin{cases} \operatorname{sn}(x+2iK') = +\operatorname{sn} x \\ \operatorname{cn}(x+2iK') = -\operatorname{cn} x \\ \operatorname{dn}(x+2iK') = -\operatorname{dn} x, \end{cases}$$

et ces relations montrent que $\operatorname{sn} x$, $\operatorname{cn} x$, $\operatorname{dn} x$ se reproduisent lorsqu'on change x en $x+4K$ et en $x+4iK'$. Mais il est important d'observer qu'à l'égard des quantités $2K$ et $2iK'$, les trois fonctions doivent être considérées comme doublement périodiques de seconde espèce, leurs multiplicateurs μ et μ' étant ± 1. Sous ce point de vue, je dis qu'elles servent respectivement d'éléments simples pour les fonctions uniformes, $F(x)$, $F_1(x)$, $F_2(x)$, qui satisfont aux conditions suivantes :

$$\begin{cases} F(x+2K) = -F(x) \\ F_1(x+2K) = -F_1(x) \\ F_2(x+2K) = +F_2(x), \end{cases}$$

$$\begin{cases} F(x+2iK') = +F(x) \\ F_1(x+2iK') = -F_1(x) \\ F_2(x+2iK') = -F_2(x) \end{cases}$$

Effectivement elles ont les mêmes multiplicateurs et n'admettent dans le parallélogramme des périodes $a = 2K'$, $b = 2iK'$ qu'un seul et unique pôle donné par la racine $x = iK'$ de l'équation $\Theta(x) = 0$. En désignant donc par R, R_1, R_2, les résidus correspondant à ce pôle, de $\operatorname{sn} x$, $\operatorname{cn} x$, $\operatorname{dn} x$, les éléments simples seront comme on l'a vu: $\dfrac{\operatorname{sn} x}{R}$, $\dfrac{\operatorname{cn} x}{R_1}$ $\dfrac{\operatorname{dn} x}{R_2}$;

voici maintenant comment s'obtiennent ces résidus. Employons les relations.

$$\operatorname{Sn}(x+iK')=\frac{1}{k\operatorname{sn}x},$$

$$\operatorname{Cn}(x+iK')=\frac{\operatorname{dn}x}{ik\operatorname{sn}x},$$

$$\operatorname{dn}(x+iK')=\frac{\operatorname{cn}x}{i\operatorname{Sn}x},$$

et remarquons que si l'on fait $x=0$, $\operatorname{Sn}x$ s'évanouit, tandis que $\operatorname{Cn}x$ et $\operatorname{dn}x$ sont égaux à l'unité, d'après la définition même des constantes k et k'. En désignant par ω la dérivée pour $x=0$ de $\operatorname{Sn}x$ on trouve ainsi :

$$R=\frac{1}{k\omega},\qquad R_1=\frac{1}{ik\omega},\qquad R_2=\frac{1}{i\omega}.$$

Ceci posé, une application facile des formules de décomposition en éléments simples va nous donner les équations différentielles qui rattachent à l'intégrale elliptique les quantités $\operatorname{Sn}x, \operatorname{Cn}x, \operatorname{dn}x$; et de la même source nous tirerons aussi les expressions découvertes par Euler pour l'addition des arguments dans ces fonctions.

Soit en premier lieu :

$$F(x)=\operatorname{Cn}x\operatorname{dn}x,$$

$$F_1(x)=\operatorname{Sn}x\operatorname{dn}x,$$

$$F_2(x)=\operatorname{Sn}x\operatorname{cn}x;$$

dans ces trois cas nous avons le seul pôle $x=iK'$, qui entre au second degré ; on peut donc immédiatement écrire en désignant par $\alpha\,\beta$ et γ des constantes :

$$\operatorname{Cn}x\operatorname{dn}x=\alpha\operatorname{Sn}x+\alpha' D_x\operatorname{Sn}x,$$

$$\operatorname{Sn}x\operatorname{dn}x=\beta\operatorname{Cn}x+\beta' D_x\operatorname{Cn}x,$$

$$\operatorname{Sn}x\operatorname{cn}x=\gamma\operatorname{dn}x+\gamma' D_x\operatorname{dn}x.$$

Mais $\operatorname{Cn}x\operatorname{dn}x$ est une fonction paire, $\operatorname{Sn}x\operatorname{dn}x$ et $\operatorname{Sn}x\operatorname{Cn}x$ sont impaires, on en conclut que α, β, γ sont nulles. Enfin ayant dans le voisinage du pôle : $\operatorname{Sn}x=\frac{R}{x-iK'}$, $\operatorname{Cn}x=\frac{R_1}{x-iK'}$, $\operatorname{dn}x=\frac{R_2}{x-iK'}$, il faut poser les conditions :

$$R_1R_2=-\alpha' R,$$

$$R\,R_2=-\beta' R_1,$$

$$R\,R_1=-\gamma' R_2.$$

et ces relations donnent :

$$\alpha'=\frac{1}{\omega},\qquad \beta'=-\frac{1}{\omega},\qquad \gamma'=-\frac{1}{k^2\omega}$$

Nous obtenons ainsi les équations différentielles :

$$D_x\operatorname{Sn}x=\omega\operatorname{Cn}x\operatorname{dn}x,$$

$$D_x\operatorname{Cn}x=-\omega\operatorname{Sn}x\operatorname{dn}x,$$

$$D_x\operatorname{dn}x=-k^2\omega\operatorname{Sn}x\operatorname{Cn}x.$$

Voici les conséquences qui s'en tirent

On a d'abord : $\operatorname{Sn}x D_x\operatorname{Sn}x+\operatorname{Cn}x D_x\operatorname{Cn}x=0,$

$k^2\operatorname{Sn}x D_x\operatorname{Sn}x+\operatorname{dn}x D_x\operatorname{dn}x=0,$

d'où

$$Sn^2x + Cn^2x = C,$$
$$k^2\, Sn^2x + dn^2x = C'.$$

Les constantes se déterminent en faisant $x=0$, ce qui donne immédiatement $C=0, C'=1$, et l'on parvient ainsi aux relations algébriques :

$$Sn^2x + Cn^2x = 1,$$
$$k^2 Sn^2x + dn^2x = 1.$$

Posons : $x=K$ dans la seconde ; on a, $Sn\,K=1$, $dn\,K = k'$ d'après les relations :

$$Sn\,(x+K) = \frac{cnx}{dnx}$$
$$dn\,(x+K) = \frac{k'}{dnx}$$

et on en conclut cette relation d'une grande importance

$$k^2 + k'^2 = 1.$$

Soit maintenant, afin d'arriver à l'inversion de l'intégrale elliptique de première espèce :

$$Sn\,x = z\,;$$

les résultats précédents nous donnent :

$$\frac{dz}{dx} = \omega\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}$$

d'où :

$$\omega\, dx = \frac{dz}{\sqrt{R(z)}},$$

et par conséquent :

$$\omega\, x = \int^z \frac{dz}{\sqrt{R(z)}},$$

en posant, comme nous l'avons fait dans les leçons précédentes :

$$R(z) = (1-z^2)(1-k^2z^2).$$

Supposons les quantités K, K' réelles ; les constantes que nous avons désignées par k et k' seront de même réelles et inférieures à l'unité, d'après la condition : $k^2 + k'^2 = 1$. Cela étant, lorsque x passe par une suite de valeurs réelles de 0 à K, $z = \frac{1}{\sqrt{k}}\frac{H(x)}{\Theta(x)}$ représente une suite de quantités réelles variant d'une manière continue de zéro à l'unité, puisque le dénominateur $\Theta(x)$ ne s'annule que pour la valeur imaginaire $x = iK'$, nous avons par conséquent :

$$\omega\, K = \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{R(z)}}.$$

Employons ensuite la formule $Sn\,(K+x) = \frac{cnx}{dnx}$, et changeons x en ix, ce qui donne : $Sn\,(K+ix) = \frac{cnix}{dnix}$. On voit ainsi qu'en faisant croître x de zéro à K', le second membre qui est réel, varie d'une manière continue de l'unité à $\frac{1}{k}$. Dans cet intervalle, en effet, le dénominateur $dnix$ est toujours différent de zéro, et la relation $Sn\,(K+iK'+x) = \frac{dnx}{kcnx}$ donne bien, $Sn\,(K+iK') = \frac{1}{k}$, en y faisant $x=0$ (*) Nous pouvons en conséquence poser :

$$\omega i K' = \int_1^{\frac{1}{k}} \frac{dz}{\sqrt{R(z)}}$$

(*) Pour suivre facilement la marche des valeurs réelles et positives que prennent les trois fonctions Snx, Cnx, dnx, il suffit de considérer le rectangle $OACB$, dont les côtés OA et OB, sont

ou, comme nous l'avons déjà vu:

$$\omega K' = \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k'^2 z^2)}} = \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{R_1(z)}}.$$

Cela étant, pour parvenir à l'inversion de l'intégrale :

$$\xi = \int_0^Z \frac{dz}{\sqrt{R(z)}},$$

on voit qu'il suffit de poser $\xi = \omega x$ dans l'expression de $Z = Sn\,x$, et de prendre :

$$\omega K = \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{R(z)}},$$

$$\omega K' = \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{R_1(z)}};$$

ce qui donne :

$$\log. q = - \frac{\int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{R(z)}}}{\int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{R_1(z)}}}$$

En faisant ces substitutions on remarque que ω disparaît partout; nous obtenons donc z en fonction de ξ par une formule où n'entre plus que le seul paramètre k.

Revenons un moment à l'égalité :

$$k^2 + k'^2 = 1;$$

si on remplace k et k' par leurs développements en série en fonction de q, on est conduit à cette relation remarquable :

$$(2\sqrt[4]{q} + 2\sqrt[4]{q^9} + \dots)^4 + (1 - 2q + 2q^4 + \dots)^4 = (1 + 2q + 2q^4 + \dots)^4;$$

Elle donne le premier exemple du rôle que joue la théorie des fonctions elliptiques dans la théorie des nombres, et nous allons montrer qu'on en tire une proposition sur la décomposition des nombres en quatre carrés.

Soit à cet effet.

$$1 + 2q + 2q^4 + \dots = \Sigma q^{n^2};$$
$$(n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

nous aurons d'abord, en élevant au carré :

$$(1 + 2q + 2q^4 + \dots)^2 = \Sigma q^{n^2 + n'^2};$$

le second membre s'étendant à toutes les valeurs entières positives et négatives de n et n'. Il s'ensuit qu'une puissance donnée de q, q^N aura pour coefficient le nombre des solutions de l'équation : $n^2 + n'^2 = N$, et en considérant ensuite le cube et la quatrième puissance, à savoir :

$$(1 + 2q + 2q^4 + \dots)^3 = \Sigma q^{n^2 + n'^2 + n''^2}$$
$$(1 + 2q + 2q^4 + \dots)^4 = \Sigma q^{n^2 + n'^2 + n''^2 + n'''^2};$$

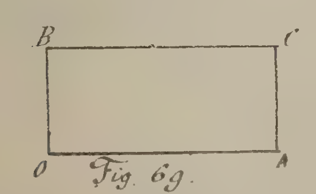


Fig. 69.

égaux respectivement à K et K'. Lorsque la variable décrit successivement OA, AC, CB, $Sn\,x$ croît de zéro à l'unité, de l'unité à $\frac{1}{k}$, de $\frac{1}{k}$ à l'infini. A l'égard de $Cn\,x$ on suivra le chemin représenté par AO et OB, la fonction croît alors de zéro à l'unité, puis de l'unité à l'infini. Enfin pour $dn\,x$, la variable décrivant les droites CA, AO et OB, la fonction croît de zéro à k', de k' à l'unité et en dernier lieu de l'unité à l'infini.

le coefficient de q^N dans le second membre sera de même le nombre des solutions en nombres entiers, positifs ou négatifs, des équations :

$$n^2+n'^2+n''^2=N,$$

$$n^2+n'^2+n''^2+n'''^2=N.$$

Nous pouvons donc écrire :

$$(1+2q+2q^4+\ldots\ldots)=\Sigma(N)q^N,$$

en désignant par (N) le nombre des décompositions en quatre carrés de l'exposant N qui représente tous les nombres entiers positifs.

D'une manière analogue on aura :

$$(\sqrt[4]{q}+\sqrt[4]{q^9}+\ldots\ldots)^4=\Sigma(N)_1 q^N,$$

le coefficient $(N)_1$ signifiant, dans cette égalité, le nombre des solutions de l'équation :

$$(2n+1)^2+(2n'+1)^2+(2n''+1)^2+(2n'''+1)^2=4N,$$

où N est évidemment un nombre impair, sous la condition qui n'avait point lieu tout à l'heure que n, n', n'', n''' soient positifs. Cela étant le changement de q en $-q$ nous donne :

$$(1+2q+2q^4+\ldots\ldots)^4=\Sigma(-1)^N(N)q^N;$$

de sorte que l'identité proposée conduit à l'équation suivante :

$$16(N)_1+(-1)^N(N)=(N).$$

On voit que pour des valeurs paires de N les deux termes $(-1)^N(N)$ et (N) se détruisent : si N est impair on a la relation :

$$8(N)_1=(N),$$

et par conséquent la proposition suivante : le nombre des décompositions en quatre carrés quelconques d'un entier impair est égal à huit fois le nombre des décompositions du quadruple de cet entier en une somme de quatre carrés dont les racines sont des nombres tous impairs et positifs.

Nous avons encore à donner les formules analogues à celles de la trigonométrie élémentaire pour exprimer $\operatorname{sn}(x+a)$, $\operatorname{cn}(x+a)$, $\operatorname{dn}(x+a)$ au moyen des fonctions relatives aux arguments x et a. Dans ce but, nous considérerons pour les décomposer en éléments simples, les fonctions de seconde espèce $F(x)$, $F_1(x)$, $F_2(x)$, qui ont successivement les mêmes multiplicateurs que $\operatorname{sn} x$, $\operatorname{cn} x$, $\operatorname{dn} x$ à savoir :

$$\begin{aligned}
F(x) &= \operatorname{cn} x \operatorname{dn}(x+a) \\
&= \operatorname{dn} x \operatorname{cn}(x+a), \\
F_1(x) &= \operatorname{sn} x \operatorname{dn}(x+a) \\
&= \operatorname{dn} x \operatorname{sn}(x+a), \\
F_2(x) &= \operatorname{sn} x \operatorname{cn}(x+a) \\
&= \operatorname{cn} x \operatorname{sn}(x+a).
\end{aligned}$$

On a, dans ces divers cas, deux pôles simples toujours les mêmes, $x=iK'$ et $x=-a+iK'$ et nous pouvons immédiatement écrire par exemple :

$$\operatorname{cn} x \operatorname{dn}(x+a)=\alpha \operatorname{sn} x+\beta \operatorname{sn}(x+a),$$

$$\operatorname{sn} x \operatorname{dn}(x+a)=\alpha' \operatorname{cn} x+\beta' \operatorname{cn}(x+a),$$

etc, etc ……………………,

en désignant par α et β des constantes. Elles s'obtiennent de la manière la plus facile, si l'on suppose $x=0$ et $x=-a$; on trouve ainsi :

$$\alpha = -\frac{cna}{sna}, \qquad \beta = \frac{dna}{sna},$$

$$\alpha' = \frac{cna}{sna}, \qquad \beta' = -\frac{1}{sna}.$$

Le même procédé s'applique aussi à toutes les autres fonctions que nous avons considérées et donne les relations suivantes :

$$\text{I.}\ \begin{cases} cnx\, sna\, dn(x+a) = dna\ sn(x+a) - snx\ cna \\ dnx\, sna\, cn(x+a) = cna\ sn(x+a) - snx\ dna \end{cases}$$

$$\text{II.}\ \begin{cases} snx\, sna\, dn(x+a) = cnx\ cna - cn(x+a) \\ dnx\, sna\, sn(x+a) = cnx - cna\ cn(x+a) \end{cases}$$

$$\text{III.}\ \begin{cases} k^2 snx\, sna\, cn(x+a) = dnx\ dna - dn(x+a) \\ k^2 cnx\, sna\, sn(x+a) = dnx - dna\ dn(x+a) \end{cases}$$

Qu'on prenne maintenant dans les équations I et II celles-ci :

$$dnx\, sna\, cn(x+a) = cna\ sn(x+a) - snx\ dna$$

$$dnx\, sna\, sn(x+a) = cnx - cna\ cn(x+a),$$

on en tire d'abord :

$$sn(x+a) = \frac{snx\ cna\ dna + cnx\ dnx\ sna}{1-k^2 sn^2x\ sn^2a}$$

$$cn(x+a) = \frac{cnx\ cna - snx\ dnx\ sna\ dna}{1-k^2 sn^2x\ sn^2a}$$

et nous avons ensuite au moyen d'une des relations III

$$dn(x+a) = \frac{dnx\, dna - k^2 snx\ cnx\, sna\ cna}{1-k^2 sn^2x\ sn^2a}$$

Bien d'autres méthodes conduisent à ces mêmes résultats, et la suivante que j'indiquerai encore nous donnera en outre la formule importante concernant l'addition des arguments pour la fonction: $Z(x) = \frac{\Theta'(x)}{\Theta(x)}$

Soit les expressions :

$$\Phi(x) = k^2 snx\, sn(x+a),$$

$$\Phi_1(x) = k^2 cnx\, cn(x+a),$$

$$\Phi_2(x) = k^2 dnx\ dn(x+a),$$

qui ont évidemment $2K$ et $2iK'$ pour périodes ; nous les décomposerons en éléments simples, en appliquant la formule générale relative aux fonctions doublement périodiques de première espèce.

Remarquant dans ce but que l'expression $\chi(x) = \Sigma\, Q^{m^2} e^{\frac{2mi\pi x}{a}}$, précédemment employée devient $\Theta_1(x)$ si l'on y remplace a par $2K$ et b par $2iK'$; on a en même temps ($c = K + iK'$) et la quantité servant d'élément simple devient :

$$\frac{\Theta_1'(x+K+iK')}{\Theta_1(x+K+iK')} = \frac{\Theta'(x+iK')}{\Theta(x+iK')}$$

Cela étant, les pôles des fonctions que nous envisageons sont précisément les racines des équations $\Theta(x)=0$, $\Theta(x+a)=0$; on peut donc prendre comme situées dans le même parallélogramme

des périodes les racines iK' et $-a+iK$. Ces racines étant simples les fonctions, $\Phi(x), \Phi_1(x), \Phi_2(x)$ en désignant par $-R$ et R_1 les résidus correspondants et par C une constante, se présentent sous la forme suivante :

$$C + R\frac{\Theta'(x)}{\Theta(x)} + R_1\frac{\Theta'(x+a)}{\Theta(x+a)}$$

Mais on sait que : $R+R_1=0$; on a donc dans les trois cas, en modifiant la constante, l'expression suivante :

$$C + R\left[\frac{\Theta'(x)}{\Theta(x)} + \frac{\Theta'(a)}{\Theta(a)} - \frac{\Theta'(x+a)}{\Theta(x+a)}\right],$$

ou plus simplement si l'on pose : $Z(x) = \frac{\Theta'(x)}{\Theta(x)}$

$$C + R\left[Z(x) + Z(a) - Z(x+a)\right].$$

Calculons maintenant les résidus R de nos trois fonctions pour $x = iK'$; nous remarquerons qu'ils sont respectivement les mêmes que ceux des expressions suivantes pour $x=0$, à savoir :

$$\Phi(x+iK') = \frac{1}{sn(x+a)\,snx}$$

$$\Phi_1(x+iK') = -\frac{dnx\,dn(x+a)}{snx\,sn(x+a)}$$

$$\Phi_2(x+iK') = -\frac{cnx\,cn(x+a)}{k^2\,snx\,sn(x+a)}$$

On trouve ainsi

$$R = \frac{1}{\omega\, sna},\ -\frac{dna}{\omega\, sna},\ -\frac{cna}{\omega\, k^2 sna}$$

en continuant de désigner par ω la valeur pour $x=0$ de la dérivée de snx. Mais l'équation différentielle que nous avons obtenue

$$D_x\, snx = cnx\, dnx,$$

montre qu'on a $\omega = 1$, et l'on en conclut les relations :

$$\begin{cases} k^2\, snx\, sn(x+a) = C + \dfrac{1}{sna}\left[Z(x)+Z(a)-Z(x+a)\right], \\ k^2\, cnx\, cn(x+a) = C_1 - \dfrac{dna}{sna}\left[Z(x)+Z(a)-Z(x+a)\right] \\ dnx\, dn(x+a) = C_2 - \dfrac{cna}{sna}\left[Z(x)+Z(a)-Z(x+a)\right] \end{cases}$$

Les constantes se déterminent en faisant $x=0$, et on a finalement :

$$\begin{cases} k^2\, snx\, sna\, sn(x+a) = Z(x)+Z(a)-Z(x+a) \\ k^2\, cnx\, sna\, cn(x+a) = k^2\, sna\, cna - Z(x) - Z(a) + Z(x+a) \\ dnx\, sna\, dn(x+a) = sna\, dna - Z(x) - Z(a) + Z(x+a) \end{cases}$$

Éliminons entre ces trois égalités la quantité $Z(x)+Z(a)-Z(x+a)$, on obtient :

$$\begin{cases} cna\, cn(x+a) = cna - snx\, dna\, sn(x+a), \\ dnx\, dn(x+a) = dna - k^2\, snx\, cna\, sn(x+a) \end{cases}$$

et nous reconnaissons en permutant x et a deux des équations que nous avons précédemment obtenues, dont les autres peuvent ensuite se déduire.

La relation à laquelle nous venons de parvenir

$$k^2 snx\, sna\, sn(x+a) = Z(x) + Z(a) - Z(x+a)$$

est d'une grande importance dans la théorie des fonctions elliptiques ; je me bornerai

à en déduire la conséquence suivante.

Divisons les deux membres par a et supposons $a=0$, on aura en désignant par ζ_0 la constante $Z'(0)$:

$$K^2 Sn^2 x = -Z'(x) + \zeta_0 ;$$

on en conclut d'abord:

$$Z(x) = \frac{\Theta'(x)}{\Theta(x)} = \zeta x - \int_0^x k^2 Sn^2 x\, dx$$

puis par une nouvelle intégration cette expression de $\Theta(x)$, a savoir:

$$\frac{\Theta(x)}{\Theta(0)} = e^{\frac{\zeta x^2}{2} - \int_0^x dx \int_0^x k^2 Sn^2 x\, dx}$$

On voit ainsi que l'exponentielle:

$$e^{-\int_0^x dx \int_0^x k^2 Sn^2 x\, dx}$$

est une fonction holomorphe de la variable; Mr Weierstrass qui l'a introduite avec le plus grand succès dans la théorie des fonctions elliptiques, la représente par $Al(x)$, de sorte que l'on a:

$$Al(x) = \frac{e^{-\frac{1}{2}\zeta x^2}\Theta(x)}{\Theta(0)}$$

Trois autres fonctions de même nature qui correspondent à $H(x)$, $H_1(x)$ et $\Theta_1(x)$ sont désignées par $Al(x)_1$, $Al(x)_2$, $Al(x)_3$, et définies par les relations:

$$Al(x)_1 = \frac{e^{-\frac{1}{2}\zeta x^2} H(x)}{H'(0)},$$

$$Al(x)_2 = \frac{e^{-\frac{1}{2}\zeta x^2} H_1(x)}{H_1(0)},$$

$$Al(x)_3 = \frac{e^{-\frac{1}{2}\zeta x^2} \Theta_1(x)}{\Theta_1(0)}.$$

J'ai voulu seulement donner la définition de ces transcendantes, qui ne seront pas étudiées dans ces leçons. Mais je reviendrai encore sur l'équation

$$\frac{\Theta'(x)}{\Theta(x)} = \zeta x - \int_0^x k^2 Sn^2 x\, dx,$$

dont la découverte est due à Jacobi, pour en indiquer quelques conséquences. Soit d'abord $x=K$; en remarquant que la relation

$$\Theta(K+x) = \Theta(K-x),$$

donne;

$$\Theta(K+x) = -\Theta'(K-x)$$

et par conséquent $\Theta'(K)=0$, pour $x=0$, nous en déduirons en supposant $x=K$.

$$\zeta_1 K = \int_0^K k^2 Sn^2 x\, dx.$$

L'intégrale définie à laquelle nous sommes amenés et qui devient $\int_0^1 \frac{k^2 z^2 dz}{\sqrt{R(z)}}$, par la substitution $Sn\,x = z$, est la fonction complète de seconde espèce. Elle correspond à l'intégrale $K = \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{R(z)}}$ qui est la fonction complète de première espèce, et en adoptant la notation de Mr Weierstrass, nous la designerons par J. Nous ferons aussi:

$$i\,J' = \int_K^{K+iK'} k^2 Sn^2 x\, dz = \int_1^{\frac{1}{k}} \frac{k^2 z^2 dz}{\sqrt{R(z)}}$$

de sorte que J' correspondra à K' qui est défini par l'égalité :

$$i\,K' = \int_1^{\frac{1}{k}} \frac{dz}{\sqrt{R(z)}}$$

Ces quantités sont liées par la relation suivante :

$$K\,J' - J\,K' = \frac{\pi}{2},$$

que nous allons démontrer.

Revenons à cet effet à l'équation de la page 236

$$\Theta\,(x + K + i\,K') = i\,\lambda\, H_1(x)\,;$$

on aura en prenant la dérivée logarithmique :

$$\frac{\Theta'(x+K+i\,K')}{\Theta\,(x+K+i\,K')} = -\frac{i\,\pi}{2K} + \frac{H_1'(x)}{H_1(x)}$$

et par conséquent, si l'on suppose $x = 0$,

$$\frac{\Theta'(K+i\,K')}{\Theta\,(K+i\,K')} = -\frac{i\,\pi}{2K}$$

Cela étant faisons dans l'équation de Jacobi, $x = K + i\,K'$ et remarquons qu'on peut écrire :

$$\int_0^{K+i\,K'} k^2\, Sn^2 x\, dx = J + i\,J'$$

On trouve ainsi :

$$-\frac{i\,\pi}{2K} = \zeta\,(K + i\,K') - J - i\,J'$$

ce qui conduit après avoir remplacé ζ par $\frac{J}{K}$ à l'égalité qu'il s'agissait d'établir.

$$\frac{\pi}{2} = K\,J' - J\,K'.$$

Considérons maintenant l'équation dérivée,

$$\frac{\Theta''(x)}{\Theta\,(x)} - \frac{\Theta'^2(x)}{\Theta^2\,(x)} = \zeta - k^2\, Sn^2 x\,,$$

elle donne en faisant $x = 0$:

$$\frac{\Theta''\,(0)}{\Theta\,(0)} = \zeta\,;$$

cette expression remarquable conduit à rechercher les valeurs que prennent de même pour $x = 0$, les quantités analogues. $\frac{H''(x)}{H\,(x)}$, $\frac{H_1''(x)}{H_1(x)}$, $\frac{\Theta_1''(x)}{\Theta_1(x)}$ Elles s'obtiennent facilement au moyen des relations

$$H\,(x) = \sqrt{k}\; Sn\,x\;\Theta\,(x),$$

$$H_1(x) = \sqrt{\frac{k}{k'}}\; Cn x\;\;\Theta\,(x),$$

$$\Theta_1(x) = \frac{1}{\sqrt{k'}}\; dn x\;\;\Theta\,(x),$$

en faisant usage de la formule :

$$\frac{(U\;V)''}{U\;V} = \frac{U''}{U} + 2\,\frac{U'}{U}\,\frac{V'}{V} + \frac{V''}{V''}$$

On trouve ainsi

$$\frac{H''(x)}{H\,(x)} = 2k^2 Sn^2 x - 1 - k^2 + \frac{2 Cn x\; dn x\; \Theta'(x)}{Sn x\;\;\Theta\,(x)} + \frac{\Theta''(x)}{\Theta\,(x)},$$

$$\frac{H_1''(x)}{H_1(x)} = 2\,k^2 Sn^2 x - 1 - \frac{2 Sn x\, dn x\;\Theta'(x)}{Cn x\;\;\Theta\,(x)} + \frac{\Theta''(x)}{\Theta\,(x)},$$

$$\frac{\Theta_1''(x)}{\Theta_1\,(x)} = 2\,k^2 Sn^2 x - k^2 - \frac{2\,k^2 Sn x\; Cn x\;\Theta'(x)}{dn x\;\;\Theta\,(x)} + \frac{\Theta''(x)}{\Theta\,(x)},$$

Cela étant il suffit de faire $x=0$, ce qui donne, $\frac{\Theta'(x)}{Sn x} = \Theta''(0)$ et $\frac{H''(x)}{H(x)} = \frac{H'''(0)}{H'(0)}$, pour parvenir aux valeurs cherchées :

$$\frac{H'''(0)}{H'(0)} = -1 - k^2 + 3\zeta,$$

$$\frac{H_1''(0)}{H_1(0)} = -1 + \zeta,$$

$$\frac{\Theta_1''(0)}{\Theta_1(0)} = -k^2 + \zeta.$$

Nous leur donnerons une autre forme en introduisant les dérivées prises par rapport à q, on a en effet :

$$\left(\frac{2K}{\pi}\right)^2 \Theta''(0) = -4 q D_q \Theta(0),$$

$$\left(\frac{2K}{\pi}\right)^3 H'''(0) = -4 q D_q \left[\frac{2K}{\pi} H'(0)\right]$$

$$\left(\frac{2K}{\pi}\right)^2 H_1''(0) = -4 q D_q H_1(0)$$

$$\left(\frac{2K}{\pi}\right)^2 \Theta_1''(0) = -4 q D_q \Theta_1(0)$$

et de là résultent ces nouvelles égalités :

$$4q D_q \log \Theta(0) = -\left(\frac{2K}{\pi}\right)^2 \zeta$$

$$4 q D_q \log \left[\left(\frac{2K}{\pi}\right) H'(0)\right] = \left(\frac{2K}{\pi}\right)^2 (1 + k^2 - 3\zeta)$$

$$4q D_q \log H_1(0) = \left(\frac{2K}{\pi}\right)^2 (1 - \zeta)$$

$$4q D_q \log \Theta_1(0) = \left(\frac{2K}{\pi}\right)^2 (k^2 - \zeta)$$

dont j'indiquerai quelques conséquences.

Elles donnent d'abord la relation :

$$D_q \log \left[\left(\frac{2K}{\pi}\right) H'(0)\right] = D_q \log \left[\Theta(0)\, \Theta_1(0)\, H_1(0)\right]$$

à laquelle Halphen et M.r Caspary sont parvenus chacun de leur coté par une méthode differente. On en tire en désignant par C une constante,

$$\frac{2K}{\pi} H'(0) = C \cdot \Theta(0)\, \Theta_1(0)\, H_1(0)$$

d'où l'identité :

$$2\sqrt[4]{q} - 6\sqrt[4]{q^9} + \ldots\ldots = C\,(1 - 2q + 2q^4 \ldots\ldots)$$
$$\times (1 + 2q + 2q^4 + \ldots\ldots)$$
$$\times (2\sqrt[4]{q} + 2\sqrt[4]{q^9} + \ldots\ldots)$$

au moyen de laquelle on voit que $C = 1$. Remarquons encore qu'ayant $Sn\, x = \frac{1}{\sqrt{k}} \frac{H(x)}{\Theta(x)}$, on en conclut après avoir divisé les deux membres par x, et en posant $x = 0$,

$$1 = \frac{1}{\sqrt{k}} \frac{H'(0)}{\Theta(0)}$$

puis d'après la valeur $\sqrt{k} = \frac{H_1(0)}{\Theta_1(0)}$, (page 237)

$$1 = \frac{\Theta_1(0)\, H'(0)}{H_1(0)\, \Theta(0)}$$

Multipliant membre à membre avec l'équation qu'on vient d'obtenir

$$\frac{2K}{\pi} H'(0) = \Theta(0)\, \Theta_1(0)\, H_1(0),$$

on trouve :

$$\frac{2K}{\pi} = \Theta^2(0)$$

d'où ce résultat important qui est dû à Jacobi.

$$\sqrt{\frac{2K}{\pi}} = \Theta_1(0)$$

25ème Leçon.

Nous avons vu dans la leçon précédente, que les quantités $\Theta(x)$, $\Theta_1(x)$, $H(x)$, $H_1(x)$ ne changent point lorsqu'on y remplace x, K, K' par $\omega x, \omega K, \omega K'$; nous conviendrons par suite qu'elles seront définies dorénavant en prenant :

$$K = \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{R(z)}}$$

$$K' = \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{R_1(z)}}$$

De là résulte comme nous l'avons établi que si l'on fait

$$sn\,x = \frac{1}{\sqrt{k}} \frac{H(x)}{\Theta(x)},$$

$$cn\,x = \sqrt{\frac{k'}{k}} \frac{H_1(x)}{\Theta(x)}$$

$$dn\,x = \sqrt{k'} \frac{\Theta_1(x)}{\Theta(x)},$$

on a en supposant le module k réel et inférieur à l'unité, les trois équations différentielles:

$$D_x\, Sn x = cn x\, dn x,$$

$$D_x\, Cn x = - sn x\, dn x,$$

$$D_x\, dn x = - k^2 sn x\, cn x,$$

Voici maintenant une remarque importante :

Il a été précédemment établi que lorsque le module décrit un contour fermé comprenant le seul point $k^2 = 0$, K ne change point, tandis que iK' devient :

$$2K + iK'$$

Et à l'égard d'un contour renfermant le point $k^2 = 1$, iK' ne change pas, tandis qu'on trouve au lieu de K, $K - 2iK'$.

Nous sommes donc amenés à cette conséquence nécessaire, que les fonctions qu'on déduit de $Sn x$, $cn x$, $dn x$, en remplaçant K et iK' par les quantités placées en regard :

$$\text{I} \begin{Bmatrix} K, & K \\ iK', & 2K + iK' \end{Bmatrix},$$

$$\text{II} \begin{Bmatrix} K, & K - 2iK' \\ iK', & iK' \end{Bmatrix},$$

satisfont aux mêmes équations différentielles, et par suite se reproduisent comme ayant pour $x = 0$, les mêmes valeurs initiales. Dans le premier cas, lorsque K ne change pas, on vérifie de

suite par la périodicité de l'exponentielle que $q = e^{i\pi \cdot \frac{iK'}{K}}$ ne change point non plus. Mais dans le second cas, on est conduit à de nouvelles expressions analytiques absolument distinctes de ces fonctions, et cette circonstance donne l'origine de ce que Jacobi a appelé la théorie des formes en nombre infini, des quatre transcendentes, $\Theta(x)$ $\Theta_1(x)$, $H(x)$, $H_1(x)$. Nous obtenons effectivement un nombre infini de formes, en considérant tous les contours fermés que décrit k^2 en tournant un nombre quelconque de fois dans le sens direct ou le sens inverse autour des deux points de discontinuité. Ainsi, on aura au lieu des formules I et II. les suivantes:

$$\text{III} \begin{cases} K, & K \\ iK', & 2mK + iK' \end{cases},$$

$$\text{IV} \begin{cases} K, & K - 2niK' \\ iK', & iK' \end{cases},$$

où m et n sont des entiers quelconques, positifs ou négatifs, lorsqu'on tourne m fois autour l'origine, et n fois autour du point $k^2 = 1$. Cela étant, il est aisé d'en conclure qu'en considérant un contour quelconque on est conduit à remplacer K et iK' par $\alpha K + \beta iK'$, et $\gamma K + \delta iK'$, où $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sont des entiers assujettis à la condition $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$, β et γ étant pairs, tandis que α et δ sont impairs et $\equiv 1$ Mod. 4. Je m'arrêterai un moment à ce point ayant ainsi l'occasion d'indiquer des considérations dont il est fait souvent usage.

Une substitution linéaire

$$x = \alpha x' + \beta y'$$
$$y = \gamma x' + \delta y'$$

est désignée par le symbole; $S = \begin{pmatrix} \alpha, \beta \\ \gamma, \delta \end{pmatrix}$; cela étant si on la fait suivre d'une autre $S' = \begin{pmatrix} \alpha', \beta' \\ \gamma', \delta' \end{pmatrix}$, en posant:

$$x' = \alpha' x'' + \beta' y''$$
$$y' = \gamma' x'' + \delta' y''$$

on écrit sous forme d'un produit de deux facteurs:

$$S\,S' = \begin{pmatrix} \alpha\alpha' + \beta\gamma', & \alpha\beta' + \beta\delta' \\ \gamma\alpha' + \delta\gamma', & \gamma\beta' + \delta\delta' \end{pmatrix}$$

et on reconnaît qu'en supposant les déterminants de S et S' égaux à l'unité, il en est de même du déterminant de la substitution composée SS'.

On voit aussi que β et γ étant pairs, comme β' et γ', tandis que α et δ d'une part, α' et δ' de l'autre sont $\equiv 1$ Mod 4, les mêmes conditions s'offrent dans la substitution composée, de sorte que si l'on écrit:

$$S\,S' = \begin{pmatrix} a, & b \\ c, & d \end{pmatrix}$$

b et c seront pairs, a et d de la forme $4n+1$. Nous dirons que de telles substitutions qui conservent leurs propriétés caractéristiques lorsqu'on les compose entre elles sont du type principal.

On désigne encore par S^{-1}, la substitution inverse de S, à savoir $\begin{pmatrix} \delta, -\beta \\ -\gamma, \alpha \end{pmatrix}$;

qui donne la relation :

$$S\,S^{-1} = \begin{pmatrix} 1, & 0 \\ 0, & 1 \end{pmatrix}$$

et l'on convient d'écrire :

$$S\,S^{-1} = 1$$

Enfin on emploie une notation analogue à celle des exposants pour représenter la même substitution effectuée plusieurs fois de suite en posant : $SS = S^2$, $SSS = S^3$, etc

Le sens de ces notations bien fixé, soit,

$$S_0 = \begin{pmatrix} 1, & 0 \\ 2, & 1 \end{pmatrix}, \quad S_1 = \begin{pmatrix} 1, & -2 \\ 0, & 1 \end{pmatrix}$$

de sorte que ces substitutions particulières correspondent aux relations I et II. La substitution S relative à tous les contours possible, sera représentée par la formule

$$S = S_0^{\lambda}\, S_1^{\mu}\, S_0^{\nu}\, S_1^{\rho} \ldots$$

λ, μ, ν, ρ, etc étant des entiers positifs ou négatifs et ce qui vient d'être dit montre qu'elle appartient au type principal. La réciproque a lieu et nous allons prouver que toute substitution $T = \begin{pmatrix} a, & b \\ c, & d \end{pmatrix}$ au déterminant un, et du type principal s'exprime par la formule,

$$T = S_0^{\lambda}\, S_1^{\mu}\, S_0^{\nu}\, S_1^{\rho} \ldots\ldots$$

J'emploie à cet effet les relations suivantes :

$$T\,S_0^m = \begin{pmatrix} a + 2mb, & b \\ c + 2md, & d \end{pmatrix}$$

$$T\,S_1^n = \begin{pmatrix} a, & b - 2na \\ c, & d - 2nc \end{pmatrix}$$

elles montrent qu'on peut disposer des entiers m et n, de manière que $a + 2mb$ soit en valeur absolue moindre que b, et $b - 2na$ moindre également en valeur absolue que a. De là découle la possibilité de former une suite telle que :

$$\begin{pmatrix} a', & b \\ c', & d \end{pmatrix} = T\,S_0^m$$

$$\begin{pmatrix} a', & b' \\ c', & d' \end{pmatrix} = T\,S_0^m\,S_1^n$$

$$\begin{pmatrix} a'', & b' \\ c'', & d' \end{pmatrix} = T\,S_0^m\,S_1^n\,S_0^p$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

où l'on a, abstraction faite des signes,

$$a' < b, \quad b' < a', \quad a'' < b', \text{ etc}$$

On voit ainsi que les termes des deux suites,

$$a,\ a',\ a'', \ldots\ldots \text{ etc}$$
$$b,\ b',\ b'', \ldots \text{ etc}$$

allant en décroissant, on trouvera après un nombre fini d'opérations un terme nul, c'est à dire que nous parviendrons à l'une des deux substitutions $\begin{pmatrix} \alpha, & 0 \\ \gamma, & \delta \end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix} 0, & \beta' \\ \gamma', & \delta' \end{pmatrix}$. Mais

ces substitutions doivent être du type principal, il faut par suite exclure la seconde ; quant à la première, comme le déterminant doit être égal à l'unité, on prendra $\alpha = 1$, $\delta = 1$, en rejetant les valeurs $\alpha = 1$, $\delta = -1$, et β devra être supposé pair. Elle devient par conséquent une puissance de S_0, de sorte qu'en posant pour un moment :

$$U = S_0^m S_1^n S_0^p \ldots\ldots$$

nous aurons la relation suivante

$$T\,U = S_0^r$$

où r est un nombre entier. On en conclut que, $T = U^{-1} S_0^r$, et la proposition que nous voulions établir, résulte de la forme même de la substitution inverse de U. Effectivement il est facile de vérifier que les inverses des substitutions AB, ABC, etc composées de plusieurs entiers s'expriment par $B^{-1}A^{-1}$, $C^{-1}B^{-1}A^{-1}$, etc. L'algorithme que nous avons exposé conduit donc à représenter toute substitution du type principal, au déterminant un par un produit de puissances des substitutions fondamentales S_0 et S_1.

Ce point établi, nous allons rechercher les expressions des fonctions $\operatorname{sn} x$, $\operatorname{cn} x$, $\operatorname{dn} x$, lorsqu'on introduit à la place des périodes K et iK', les quantités :

$$L = aK + ibK',$$
$$iL' = cK + idK',$$

où a, b, c, d sont des entiers assujettis à la condition $ad - bc = 1$, b et c étant pairs, a et $d \equiv 1 \ \mathrm{Mod}\ 4$.

Et d'abord nous remarquerons qu'en posant, afin de mettre en évidence la partie réelle et la partie imaginaire on obtient

$$\frac{iK'}{K} = r + is, \qquad \frac{iL'}{L} = R + iS$$

on obtient :

$$R + iS = \frac{c + d\,(r + is)}{a + b\,(r + is)}$$

$$= \frac{ac + (ad + bc)r + bd\,(r^2 + s^2)}{(a + br)^2 + b^2 s^2} + i\,\frac{(ad - bc)s}{(a + br)^2 + b^2 s^2}$$

par conséquent S a une valeur positive comme s. Je reviens maintenant aux relations données p. 237, concernant le changement de x en $x + 2iK'$ dans les quatre transcendantes de Jacobi. On en conclut facilement que si l'on change x en $x + 2imK'$ m étant un entier quelconque, et qu'on pose afin d'abréger l'écriture :

$$g = e^{\frac{-im\pi}{K}(x + imK')}$$

on a :

$$(A)\ \begin{cases} \Theta(x + 2imK') = (-1)^m g\ \Theta(x) \\ H(x + 2imK') = (-1)^m g\ H(x) \\ \Theta_1(x + 2imK') = +g\ \Theta_1(x) \\ H_1(x + 2imK') = +g\ H_1(x) \end{cases}$$

Les équations relatives au changement de x en $x+iK'$, donnent lieu à une généralisation analogue : Soit alors :

$$g' = e^{-\frac{i(2m+1)\pi}{4K}\left[2x+i(2m+1)K'\right]}$$

nous aurons par un calcul facile :

$$(B)\begin{cases} \Theta[x+i(2m+1)K'] = (-1)^m i\, g' H(x) \\ H[x+i(2m+1)K'] = (-1)^m i\, g'\, \Theta(x) \\ \Theta_1[x+i(2m+1)K'] = +\, g' H_1(x) \\ H_1[x+i(2m+1)K'] = +\, g'\, \Theta_1(x) \end{cases}$$

cela étant, et en rappelant qu'on a posé précédemment

$$L = aK + ibK'$$

je change x en $x+aK$ dans les équations (A) et je suppose $2m = b$. Le facteur exponentiel g devenant ainsi :

$$e^{-\frac{ib\pi}{K}\left(x+aK+\frac{ibK'}{2}\right)}$$

ou bien

$$e^{-\frac{ib\pi}{2K}\left(x+\frac{aK+L}{2}\right)}$$

peut encore s'écrire :

$$e^{-\frac{iab\pi}{4}}\, e^{-\frac{ib\pi}{4K}(2x+L)}$$

En observant ensuite que l'entier a est impair et $\equiv 1$ Mod 4 on a :

$$\begin{aligned} \Theta(x+aK) &= +\,\Theta_1(x), \\ H(x+aK) &= +\,H_1(x), \\ \Theta_1(x+aK) &= +\,\Theta(x), \\ H_1(x+aK) &= -\,H(x); \end{aligned}$$

Les équations (A) donneront par conséquent :

$$\begin{aligned} \Theta(x+L) &= \alpha G\, \Theta_1(x) \\ H(x+L) &= \beta G\, H_1(x) \\ \Theta_1(x+L) &= \gamma G\, \Theta(x) \\ H_1(x+L) &= \delta G\, H(x), \end{aligned}$$

en posant pour abréger :

$$G = e^{-\frac{ib\pi}{4K}(2x+L)}$$

$$\alpha = e^{\frac{ib\pi}{4}}, \quad \beta = e^{\frac{ib\pi}{4}}, \quad \gamma = e^{-\frac{ib\pi}{4}}, \quad \delta = -e^{-\frac{ib\pi}{4}}$$

Considérons en second lieu la quantité

$$iL' = cK + idK',$$

c étant pair et $d \equiv 1$ Mod 4 ; nous changeons alors x en $x+cK$ dans les équations (B) ou nous ferons $2m+1 = d$. A la place du facteur exponentiel g', on a ainsi :

$$e^{-\frac{icd\pi}{4}}\, e^{-\frac{id\pi}{4K}(2x+iL')}$$

et au moyen des égalités précédentes; nous obtiendrons les relations :

$$(D)\begin{cases} \Theta(x+iL') = \alpha' G' H(x) \\ H(x+iL') = \beta' G' \Theta(x) \\ \Theta_1(x+iL') = \gamma' G' H_1(x) \\ H_1(x+iL') = \delta' G' \Theta_1(x) \end{cases}$$

où l'on a :

$$G' = e^{-\frac{id}{4K}(2x+iL')}$$

$$\alpha' = ie^{\frac{ic\pi}{4}}, \quad \beta' = ie^{-\frac{ic\pi}{4}}, \quad \gamma' = e^{\frac{ic\pi}{4}}, \quad \delta' = e^{-\frac{ic\pi}{4}}$$

Voici maintenant les conséquences à tirer des résultats que nous venons d'établir. Introduisons les fonctions ainsi définies :

$$\Phi(x) = e^{\frac{ib\pi x^2}{4KL}}\,\Theta(x)$$

$$\Pi(x) = e^{\frac{ib\pi x^2}{4KL}}\,H(x)$$

$$\Phi_1(x) = e^{\frac{ib\pi x^2}{4KL}}\,\Theta_1(x)$$

$$\Pi_1(x) = e^{\frac{ib\pi x^2}{4KL}}\,H_1(x)$$

au moyen de l'identité évidente :

$$\frac{(x+L)^2}{4KL} - \frac{x^2}{4KL} = \frac{2x+L}{4K},$$

les équations (C) nous donnent d'abord :

$$(E)\begin{cases} \Phi(x+L) = \alpha\,\Phi_1(x) \\ \Pi(x+L) = \beta\,\Pi_1(x) \\ \Phi_1(x+L) = \gamma\,\Phi(x) \\ \Pi_1(x+L) = \delta\,\Pi(x) \end{cases}$$

et l'on en conclut :

$$(F)\begin{cases} \Phi(x+2L) = +\Phi(x) \\ \Pi(x+2L) = -\Pi(x) \\ \Phi_1(x+2L) = +\Phi_1(x) \\ \Pi_1(x+2L) = -\Pi_1(x) \end{cases}$$

Considérons maintenant le système (D) et employons l'égalité :

$$\frac{b(x+iL')^3}{4KL} - \frac{bx^2}{4KL} = \frac{ibL'}{4KL}(2x+iL'),$$

Je remarque qu'on tire des équations :

$$L = aK + ibK'$$

$$iL = cK + idK'$$

en observant que $ad - bc = 1$:

$$dL - ibL' = K,$$

ce qui permet d'écrire :

$$\frac{ibL'}{KL} = \frac{d}{K} - \frac{1}{L}$$

Nous parvenons de cette manière aux égalités

$$(G)\begin{cases} \Phi(x+iL') = \alpha' E\, \Pi(x) \\ \Pi(x+iL') = \beta' E\, \Phi(x) \\ \Phi_1(x+iL') = \gamma' E\, \Pi_1(x) \\ \Pi_1(x+iL') = \delta' E\, \Phi_1(x) \end{cases}$$

en posant ;

$$E = e^{-\frac{i\pi}{4L}(2x+iL')}$$

Soit encore :

$$F = e^{-\frac{i\pi}{L}(x+iL')}$$

nous en tirons par le changement de x en $x+iL'$ les suivantes :

$$(H)\begin{cases} \Phi(x+2iL') = -F\Phi(x), \\ \Pi(x+2iL') = -F\,\Pi(x), \\ \Phi_1(x+2iL') = +F\,\Phi_1(x), \\ \Pi_1(x+2iL') = +F\,\Pi_1(x) \end{cases}$$

Les relations (F) et (H) conduisent immédiatement à cette importante conséquence que les fonctions $\Phi(x)$, $\Pi(x)$, $\Phi_1(x)$, $\Pi_1(x)$ satisfont aux conditions qui définissent $\Theta(x)$, $H(x)$, $\Theta_1(x)$, $H_1(x)$, en y remplaçant K et K' par L et L'.

On a par suite, si l'on pose $Q = e^{-\frac{\pi L'}{L}}$ ces développements où A, B, A_1, B_1, désignent des constantes

$$\Phi\left(\frac{2Lx}{\pi}\right) = A\,(1 - 2Q\cos 2x + 2Q^4\cos 4x \ldots\ldots)$$

$$\Pi\left(\frac{2Lx}{\pi}\right) = B\,(2\sqrt[4]{Q}\,\mathrm{Sin}\, x - 2\sqrt[4]{Q^9}\sin 3x + \ldots)$$

$$\Phi_1\left(\frac{2Lx}{\pi}\right) = A_1\,(1 + 2Q\cos 2x + 2Q^4\cos 4x + \ldots)$$

$$\Pi_1\left(\frac{2Lx}{\pi}\right) = B_1\,(2\sqrt[4]{Q}\,\mathrm{Cos}\, x + 2\sqrt[4]{Q^9}\cos 3x + \ldots).$$

J'ajoute qu'au moyen des équations (E) et (G), ces constantes peuvent être réduites à une seule.

Effectivement on tire d'abord des égalités

$$\Phi(x+L) = \alpha\,\Phi_1(x), \qquad \Pi(x+L) = \beta\,\Pi_1(x)$$

les conditions

$$A = \alpha A_1, \qquad B = \beta B_1.$$

J'emploie ensuite l'une des équations (G), la première par exemple :

$$\Phi(x+iL') = \alpha' E\,\Pi(x);$$

elle donne si l'on remplace les fonctions par leurs développements en Série :

$$A\left[1 - 2Q\cos\frac{\pi(x+iL')}{L} + 2Q^4\cos\frac{2\pi(x+iL')}{L} - \ldots\right)$$

$$= \alpha' B E\left[2\sqrt[4]{Q}\,\mathrm{Sin}\,\frac{\pi x}{2L}\ \ 2\sqrt[4]{Q^9}\ \mathrm{Sin}\,\frac{3\pi x}{2L} + \ldots\ldots\right)$$

et il est facile d'obtenir dans le second membre le terme indépendant de la

variable. Nous avons en effet d'après la valeur de E

$$2E\sqrt[4]{Q}\,\text{Sin}\,\frac{\pi x}{2L} = e^{-\frac{i\pi x}{2L}}\frac{e^{\frac{i\pi x}{2L}}-e^{-\frac{i\pi x}{2L}}}{i}$$

$$= \frac{1-e^{-\frac{i\pi x}{L}}}{i}$$

et l'on en conclut la relation :

$$A = \frac{\alpha' B}{i}.$$

On obtient par suite, en la joignant aux deux précédentes :

$$A = \alpha A_1,$$

$$B = \frac{i\alpha}{\alpha'} A_1$$

$$B_1 = \frac{i\alpha}{\alpha'\beta} A_1,$$

et d'après les valeurs de α, α', β ;

$$A = e^{\frac{ib\pi}{4}} A_1,$$

$$B = e^{\frac{i(b-c)\pi}{4}} A_1,$$

$$B_1 = e^{-\frac{ic\pi}{4}} A_1.$$

Cela posé, considérons l'expression du module en fonction de q :

$$\sqrt{k} = \frac{H_1(0)}{\Theta_1(0)} = \frac{2\sqrt[4]{q}+2\sqrt[4]{q^9}+\cdots}{1+2q+2q^4+\cdots}$$

les relations précédemment données :

$$\Pi_1(x) = e^{\frac{i\pi b x^2}{4KL}} H_1(x),$$

$$\Phi_1(x) = e^{\frac{i\pi b x^2}{4KL}} \Theta_1(x),$$

permettent d'écrire :

$$\sqrt{k} = \frac{\Pi_1(0)}{\Phi_1(0)} = e^{-\frac{ic\pi}{4}} \frac{2\sqrt[4]{Q}+2\sqrt[4]{Q^9}+\cdots}{1+2Q+2Q^4+\cdots}$$

On trouvera de même :

$$\sqrt{k'} = \frac{1-2q+2q^4-\cdots}{1+2q+2q^4-\cdots} = e^{\frac{ib\pi}{4}} \frac{1-2Q+2Q^4+\cdots}{1+2Q+2Q^4+\cdots},$$

Mais soit pour plus de clarté :

$$\sqrt{l} = \frac{2\sqrt[4]{Q}+2\sqrt[4]{Q^9}+\cdots}{1+2Q+Q^4+\cdots}$$

$$\sqrt{l'} = \frac{1-2Q+2Q^4-\cdots}{1+2Q+2Q^4+\cdots}$$

ces quantités étant ce que deviennent $\sqrt{k}$ et $\sqrt{k'}$ en changeant q en Q ou encore par la substitution de L et L' à K et K'. Les relations précédentes donnent :

$$\sqrt{l} = e^{-\frac{ic\pi}{4}} \sqrt{k},$$

$$\sqrt{l'} = e^{-\frac{ib\pi}{4}} \sqrt{k'};$$

et comme les entiers b et c sont pairs, on en conclut en élevant à la puissance quatrième : $l^2 = k^2$.

Considérons après le module, les fonctions $\operatorname{sn} x, \operatorname{cn} x, \operatorname{dn} x$, d'abord sous la forme :

$$\operatorname{sn}\frac{2Lx}{\pi}=\frac{1}{\sqrt{k}}\frac{\Pi\left(\frac{2Lx}{\pi}\right)}{\Phi\left(\frac{2Lx}{\pi}\right)}=\frac{1}{\sqrt{k}}\frac{B}{A}\cdot\frac{2\sqrt[4]{Q}\sin x+2\sqrt[4]{Q^9}\sin 3x+\cdots}{1-2Q\cos\frac{\pi x}{L}+2Q^4\cos\frac{2\pi x}{L}+\cdots},$$

$$\operatorname{cn}\frac{2Lx}{\pi}=\sqrt{\frac{k'}{k'}}\frac{\Pi_1\left(\frac{2Lx}{\pi}\right)}{\Phi_1\left(\frac{2Lx}{\pi}\right)}=\sqrt{\frac{k'}{k'}}\frac{B_1}{A}\frac{2\sqrt[4]{Q}\cos x+2\sqrt[4]{Q^9}\cos 3x+\cdots}{1-2Q\cos\frac{\pi x}{L}+2Q^4\cos\frac{2\pi x}{L}+\cdots}$$

$$\operatorname{dn}\frac{2Lx}{\pi}=\sqrt{k}\frac{\Phi_1\left(\frac{2Lx}{\pi}\right)}{\Phi\left(\frac{2Lx}{\pi}\right)}=\sqrt{k}\frac{A_1}{A}\frac{1+2Q\cos 2x+2Q^4\cos 4x+\cdots}{1-Q\cos 2x+2Q^4\cos 4x+\cdots}$$

Comme on a :

$$\frac{B}{A}=e^{-\frac{ic\pi}{4}},\quad \frac{B_1}{A}=e^{-\frac{i(b+c)\pi}{4}},\quad \frac{A_1}{A}=e^{-\frac{ib\pi}{4}}$$

elles prennent immédiatement cette forme nouvelle :

$$\operatorname{sn}\frac{2Lx}{\pi}=\frac{1}{\sqrt{l}}\frac{2\sqrt[4]{Q}\sin x-2\sqrt[4]{Q^9}\sin 3x+\cdots}{1-Q\cos\frac{\pi x}{L}+2Q^4\cos\frac{2\pi x}{L}+\cdots},$$

$$\operatorname{cn}\frac{2Lx}{\pi}=\sqrt{\frac{l'}{l}}\frac{2\sqrt[4]{Q}\cos x+2\sqrt[4]{Q^9}\cos 3x+\cdots}{1-2Q\cos\frac{\pi x}{L}+2Q^4\cos\frac{2\pi x}{L}+\cdots}$$

$$\operatorname{dn}\frac{2Lx}{\pi}=\sqrt{l}\frac{1+2Q\cos 2x+2Q^4\cos 4x+\cdots}{1-2Q\cos 2x+2Q^4\cos 4x+\cdots}$$

Nous voyons ainsi qu'en substituant L et L' aux quantités K et K', $\operatorname{sn} x, \operatorname{cn} x, \operatorname{dn} x$ restent les mêmes comme le carré du module.

Les résultats que nous venons d'obtenir ouvrent la voie à cette partie de la théorie des fonctions elliptiques, où l'on considère comme élément variable le quotient des périodes $\frac{iK'}{K}$. Nous renverrons sur ce point qui est d'une grande importance, à un beau et savant mémoire de M. Dedekind, publié dans le Journal de Bourchardt, Tome 83, page 265 (Schreiben an Herrn Borchardt über die Theorie der elliptischen Modul Functionen), et nous nous bornerons à déduire de ce qui précède l'inversion de l'intégrale elliptique, lorsque le module au lieu d'être supposé réel et plus petit que l'unité est une quantité imaginaire quelconque. Nous nous fonderons pour cela sur cette importante proposition de Riemann que pour une telle valeur du module $k^2=a+ib$, la partie réelle du quotient $\frac{K'}{K}$ est toujours positive. On le démontre facilement comme on va voir.

Soit d'abord en nous servant pour plus de commodité de la forme de Legendre :

$$K=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-(a+ib)\sin^2\varphi}},$$

$$K'=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-(1-a-ib)\sin^2\varphi}},$$

les deux intégrales étant supposées rectilignes.

Soit encore K_0 les quantités imaginaires conjuguée de K, c'est-à-dire :

$$K_0=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-(a-ib)\sin^2\varphi}};$$

nous envisagerons le produit $K_0 K'$, en le mettant sous la forme d'une intégrale double à savoir :

$$K_0 K' = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi\, d\psi}{\sqrt{[1-(1-a-ib)\sin^2\varphi][1-(a-ib)\sin^2\varphi]}}$$

et nous ferons :

$$\sqrt{[1-(1-a-ib)\sin^2\varphi][1-(a-ib)\sin^2\varphi]} = X + ibY.$$

De là on tire en élevant au carré et également les cœfficients de i :

$$[1-(1-a)\sin^2\varphi]\sin^2\psi + (1-a\sin^2\psi)\sin^2\varphi = 2XY,$$

ou bien :

$$\cos^2\varphi \sin^2\psi + \sin^2\varphi = 2XY,$$

l'on voit ainsi que le produit XY est toujours positif et ne s'annule que si l'on suppose à la fois $\varphi = 0$ et $\psi = 0$. Mais dans ce cas, c'est le facteur Y qui s'évanouit tandis que X a la valeur initiale du produit des radicaux, c'est-à-dire l'unité positive. Nous en concluons que lorsque les angles φ et ψ croissent de zéro à $\frac{\pi}{2}$, X qui ne passe jamais par zéro, garde son signe et reste toujours positif. Cela étant, il suffit d'écrire :

$$K_0 K' = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi\, d\varphi}{X+ibY} = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{X\, d\varphi\, d\psi}{X^2+b^2Y^2} - ib\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{Y\, d\varphi\, d\psi}{X^2+b^2Y^2}$$

pour reconnaître que la partie réelle $K_0 K'$ et par conséquent de $\frac{K'K_0}{KK_0} = \frac{K'}{K}$ est en effet positive.

Lorsqu'on suppose $b = 0$ et a supérieur à l'unité ou bien négatif, une des quantités K et K' est réelle et positive et l'autre imaginaire. Dans le premier cas par exemple, le radical $\sqrt{1-a\sin^2\varphi}$ passe du réel à l'imaginaire en s'évanouissant par un certain angle $\varphi = \varphi_0$, K est donc imaginaire, mais sa partie réelle étant exprimée par l'intégrale $\int_0^{\varphi_0} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-a\sin^2\varphi}}$, est essentiellement positive, de sorte que le quotient $\frac{K'}{K}$ a aussi sa partie réelle positive. On verra de même que la proposition de Riemann est évidente quand on suppose a négatif.

J'ajouterai encore cette remarque, qu'en posant :

$$\sqrt{1-(a+ib)\sin^2\varphi} = U - ibV,$$

on obtient la condition :

$$\sin^2\varphi = 2UV,$$

d'où résulte que U et V sont toujours positifs lorsque φ varie de zéro à $\frac{\pi}{2}$. Ayant donc :

$$K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{U-ibV} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{U\, d\varphi}{U^2+b^2V^2} + ib\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{V\, d\varphi}{U^2+b^2V^2}$$

on voit que la partie réelle de K est positive et que le cœfficient de i a le signe de b.

De la même manière on reconnaît qu'à l'égard de K' la partie réelle est également positive, tandis que le cœfficient de i est de signe contraire à b.

La proposition de Riemann montre que nous pouvons former avec les intégrales définies K et K', pour une valeur imaginaire quelconque du module, le système des

quatre fonctions $\Theta(x)$, $\Theta_1(x)$, $H(x)$, $H_1(x)$ Cela étant je pose :

$$\sqrt{\lambda} = \frac{H_1(0)}{\Theta_1(0)},$$

$$\sqrt{\lambda'} = \frac{\Theta(0)}{\Theta_1(0)}.$$

et je considère les expressions

$$u = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \frac{H(x)}{\Theta(x)},$$

$$V = \sqrt{\frac{\lambda'}{\lambda}} \frac{H_1(x)}{\Theta(x)}$$

$$W = \sqrt{\lambda'} \frac{\Theta_1(x)}{\Theta(x)}$$

En désignant par ω la valeur de $D_x u$ pour $x = 0$, c'est à dire :

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \frac{H'(0)}{\Theta(0)} = \frac{\Theta_1(0) H'(0)}{H_1(0)\Theta(0)}.$$

nous avons, comme on l'a établi précédemment les relations :

$$D_x u = \omega V W,$$

$$D_x V = -\omega u W,$$

$$D_x W = -\lambda^2 \omega u V,$$

Or on a vu tout à l'heure que le quotient $\frac{H_1(0)}{\Theta_1(0)}$ se reproduit multiplié par racine quatrième de l'unité lorsqu'on fait décrire à la quantité k^2 un contour quelconque qui change K et K' en L et L' La quatrième puissance est donc une fonction uniforme, et nous savons que cette fonction coïncide avec k^2 dans toute l'étendue des valeurs réelles de $k = 0$ à $k = 1$. Nous pouvons par conséquent conclure d'après le théorème de Riemann dont nous avons donné la demonstration (page 108) que l'égalité $\lambda^2 = k^2$ a lieu dans toute l'étendue du plan.

Passons à la constante designée par ω qui a pour valeur l'unité lorsqu'on suppose encore k^2 réel et < 1. Nous établirons de même que la condition $\omega = 1$ subsiste par toute valeur reelle ou imaginaire de k^2.

Revenons en effet, à la relation que nous avons démontrée :

$$\operatorname{Sn} x = \frac{1}{\sqrt{k}} \frac{2\sqrt[4]{q} \sin \frac{\pi x}{2K} - 2\sqrt[4]{q^9} \sin \frac{3\pi x}{2K} + \cdots}{1 - 2q \cos \frac{\pi x}{K} + q^4 \cos \frac{2\pi x}{K} + \cdots}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{l}} \frac{2\sqrt{Q} \sin \frac{\pi x}{2L} - 2\sqrt[4]{Q^9} \sin \frac{3\pi x}{2L} + \cdots}{1 - 2Q \cos \frac{\pi x}{L} + 2Q^4 \cos \frac{2\pi x}{L} + \cdots}$$

en divisant les deux membres par x et supposant $x = 0$, on en conclut que ω ne change point lorsqu'on remplace K et K' par L et L'. Cette quantité est donc comme λ^2 une fonction uniforme reprenant la même valeur lorsque k^2 décrit un contour fermé quelconque ; la condition $\omega = 1$

est par conséquent étendue à tout le plan.

Nous terminerons ce que nous avons eu en vue d'exposer de la théorie des fonctions elliptiques en faisant l'application du théorème de M.r Mittag-Leffler aux quantités $Z(x)$ snx cnx et dnx, dont la première joue le rôle d'élément simple dans l'expression générale des fonctions doublement périodiques de première espèce. Je rappellerai qu'en désignant par a et b les périodes et faisant $q = e^{\frac{i\pi b}{a}}$ puis :

$$\chi(x) = \Sigma\, q^{m^2} e^{\frac{2im\pi x}{a}}$$

$$(m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

on a :

$$Z(x) = \frac{\chi'\left(x - \frac{a+b}{2}\right)}{\chi\left(x - \frac{a+b}{2}\right)}$$

Nous savons aussi que les pôles de cette fonction sont représentés par $p = ma + nb$, m et n étant deux entiers quelconques, et que les résidus correspondants sont tous égaux à l'unité. Il en résulte que d'après la formule générale de la page 100, ce théorème nous donne l'expression suivante :

$$Z(x) = G(x) + \frac{1}{x} + \Sigma\left[\frac{1}{x-p} + \frac{1}{p} + \frac{x}{p^2} + \cdots + \frac{x^{\nu-1}}{p^\nu}\right]$$

où $G(x)$ désigne une fonction holomorphe et ν un nombre entier qui doit être déterminé par la condition que la série du second membre soit convergente. Comme les nombres m et n doivent prendre toutes les valeurs possible, sauf la combinaison $m=0$, $n=0$ à laquelle correspond le terme $\frac{1}{x}$ qui a été mis à part, on se trouve amené à une série double, la question se traite toutefois fort simplement comme on va voir :

Je ferai d'abord sur la formule générale de M.r Mittag-Leffler

$$f(x) = G(x) + \Sigma\left[G_n\left(\frac{1}{x-a_n}\right) - F_n(x)\right],$$

cette remarque que dans le cas où le degré ν des polynômes $F_n(x)$ est le même dans tous les termes, ils disparaissent dans l'expression de la dérivée d'ordre $\nu+1$ de $f(x)$, de sorte qu'alors la série $\Sigma\, D_x^{\nu+1} G_n\left(\frac{1}{x-a_n}\right)$, est nécessairement convergente. Cela étant comme les dérivées d'ordre ν de la quantité $\frac{1}{x-p}$ sont simplement $\frac{1}{(x-p)^{\nu+1}}$, si l'on fait abstraction d'un facteur constant, je vais montrer qu'on assure la convergence en prenant $\nu = 2$. J'emploie à cet effet une considération ingénieuse dont Halphen a fait usage dans son traité des fonctions elliptiques (T 1. page 359). J'observe que pour des valeurs infinies de m et n, ou de l'un des deux nombres, la limite du rapport $\frac{\text{Mod}(x-p)}{\text{Mod}\, p}$ est l'unité. On peut donc remplacer le terme général $\frac{1}{(x-p)^3}$, par sa valeur asymptotique $\frac{1}{p^3}$ et il suffira d'établir la convergence de la série plus simple :
$S = \Sigma \frac{1}{\text{Mod}^3 p}$. Cette convergence est manifeste lorsqu'on suppose $m=0$ ou $n=0$ puisqu'on a alors : $S\,\text{Mod}^3 b = \Sigma \frac{1}{n^3}$ et $S\,\text{Mod}^3 b = \Sigma \frac{1}{m^3}$; nous admettrons donc que

m et n, soient tous les deux différents de zéro, dans le cas général.
J'ajoute qu'on peut de plus supposer ces deux nombres positifs ; la somme considérée se décompose en effet en 4 séries correspondant aux systèmes des valeurs

$$\begin{array}{cc} m, & n, \\ m, & -n, \\ -m, & n, \\ -m, & -n, \end{array}$$

et qui reviennent à une seule en changeant les signes de a ou de b. Cela posé je considère l'ellipse représentée par l'équation

$$\text{Mod}^2(ax+by)=1,$$

et je désigne par A son grand axe. Pour toutes les valeurs de x et y que représentent un point de la courbe, on peut donc écrire,

$$x^2+y^2 < A^2$$

ou bien, comme on a en ce point $\text{Mod}^2(ax+by)=1$;

$$x^2+y^2 < A^2\,\text{Mod}^2(ax+by)$$

Cette relation étant homogène par rapport aux variables x et y, subsiste si on les multiplie par un facteur arbitraire. Elle a lieu ainsi quelles que soient les quantités x et y, et nous la mettrons sous la forme :

$$\frac{1}{\text{Mod}(ax+by)} < \frac{A}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

Cela posé, considérons l'intégrale double :

$$J=\int_1^\infty\int_1^\infty \frac{dx\,dy}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}};$$

la généralisation facile d'un théorème bien connu de Cauchy sur les séries simples fait voir que la série double sera convergente si cette quantité a une valeur finie. Or il en est ainsi, car on a :

$$\int_1^\infty \frac{dy}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^2\sqrt{1+x^2}},$$

et par conséquent :

$$J=\int_1^\infty\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^2\sqrt{1+x^2}}\right)dx$$

$$=2-\sqrt{2}$$

Ce point établi nous écrirons la relation :

$$D_x^2\,Z(x)=G(x)+\Sigma\,\frac{2}{(x-p)^3}$$

$$(m,n=0,\pm 1,\pm 2,\ldots.)$$

où $G(x)$ désigne une fonction holomorphe qu'il s'agit encore d'obtenir.

Pour cela je remarque que la somme $\Sigma \frac{1}{(x-p)^3}$ représente une fonction analytique qui admet les périodes a et b. Le changement de x en $x+a$ et en $x+b$ revient en effet à remplacer m par $m-1$ et n par $n-1$, ce que l'on peut faire sans changer la valeur de la Série qui s'étend à tous les entiers m et n. Mais nous savons qu'on a les conditions,

$$Z(x+a) = Z(x), \quad Z(x+b) = Z(x) - \frac{i\pi}{a}$$

la dérivée seconde de $Z(x)$ est donc doublement périodique, et il en est de même de $G(x)$ qui se réduit par conséquent à une constante. Je dis de plus que cette constante est nulle. La quantité $\Sigma \frac{1}{(x-p)^3}$, représente en effet, comme la dérivée seconde de $Z(x)$, une fonction impaire ; c'est ce que montre l'égalité

$$\Sigma \frac{1}{(x-p)^3} = \Sigma \frac{1}{(x+p)^3}$$

qui résulte du changement des entiers m et n en $-m$ et $-n$. Après avoir ainsi obtenu la relation,

$$D_x^2 Z(x) = \Sigma \frac{2}{(x-p)^3}$$

nous en conclurons par une double intégration l'expression cherchée de $Z(x)$. Nous isolerons pour cela dans le second membre le terme correspondant à $m=0$, $n=0$, en écrivant

$$D_x^2 Z(x) = \frac{2}{x^3} + \Sigma \frac{2}{(x-p)^3}$$

et nous remarquerons que la nouvelle Série qui figure au second membre, est comme la précédente une fonction impaire. On aura donc encore une fonction impaire si on l'intègre deux fois de suite à partir de la limite $x=0$, et c'est par là que nous obtenons avec une seule constante inconnue A l'expression qu'il s'agissait d'établir

$$Z(x) = Ax + \frac{1}{x} + \Sigma \left[\frac{1}{x-p} + \frac{1}{p} + \frac{x}{p^2}\right]$$

Il n'est pas inutile de remarquer que le terme général de la série $\frac{1}{x-p} + \frac{1}{p} + \frac{x}{p^2}$, a bien la forme qui résulte du théorème de Mr Mittag-Leffler ; on voit aussi qu'il se réduit à $\frac{x^2}{p^2(x-p)}$ et a pour valeur asymptotique $-\frac{x^2}{p^3}$, ce qui démontre à postériori la convergence de cette suite. Enfin nous déterminerons A au moyen de l'équation :

$$D_x Z(x) = A - \frac{1}{x^2} - \Sigma \left[\frac{1}{(x-p)^2} - \frac{1}{p^2}\right];$$

elle montre que cette constante est la limite pour $x=0$ de la quantité, $D_x Z(x) + \frac{1}{x^2}$, ou bien $D_x \left[Z(x) - \frac{1}{x}\right]$; voici comment elle s'obtient

Posons d'abord afin de rentrer dans les notations de Jacobi $a = 2K$ $b = 2iK'$, on aura, $X(x) = \Theta_1(x)$, et par conséquent :

$$Z(x) = \frac{\Theta_1'(x-K-iK')}{\Theta_1(x-K-iK')}$$
$$= \frac{H'(x)}{H(x)} + \frac{i\pi}{2K}$$

Employons ensuite les deux premiers termes du développement de $H(x)$, suivant les puissances croissantes de x; l'expression

$$H(x) = x H'(0) + \frac{x^3}{6} H'''(0) + -$$

donnera facilement :

$$\frac{H'(x)}{H(x)} = \frac{1}{x} + \frac{x H'''(0)}{3 H'(0)} + \cdot -$$

d'où,

$$D_x\left[\frac{H'(x)}{H(x)} - \frac{1}{x}\right] = \frac{H'''(0)}{3 H'(0)} + \cdot\cdot$$

On a donc :

$$A = \frac{H'''(0)}{3 H'(0)}$$

$$= \zeta - \frac{1+k^2}{3},$$

d'après la formule démontrée p. 247.

L'égalité que nous venons d'obtenir, $D_x\, Z(x) = \frac{H'(x)}{H(x)}$ conduit à une conséquence importante; changeons x en $x + iK'$ dans la relation de Jacobi,

$$k^2 sn^2 x = \zeta - D_x \frac{\Theta'(x)}{\Theta(x)},$$

on trouvera ainsi,

$$\frac{1}{sn^2 x} = \zeta - D_x \frac{H'(x)}{H(x)}$$

d'où ce résultat dont nous feront bientôt usage,

$$\frac{1}{sn^2 x} = \zeta - D_x\, Z(x$$

Je passe maintenant aux fonctions $sn\,x$, $cn\,x$ et $dn\,x$; elles ont les mêmes pôles représentés par la quantité $p_1 = 2mK + (2n+1)iK'$ où m et n sont deux entiers quelconques, et l'on voit par les égalités suivantes :

$$sn(p_1 + x) = \frac{(-1)^m}{k\, sn\, x},$$

$$cn(p_1 + x) = \frac{(-1)^{m+n} dn\, x}{i\, sn\, x},$$

$$dn(p_1 + x) = \frac{(-1)^n cn\, x}{i\, sn\, x},$$

que les résidus correspondants à p_1 sont $\frac{(-1)^m}{k}$, $\frac{(-1)^{m+n}}{i}$ et $\frac{(-1)^n}{i}$. On a par conséquent en désignant par $G_1(x)$, $G_2(x)$, $G_3(x)$, des fonctions holomorphes, les formules :

$$D_x^2(k\, sn\, x) = G_1(x) + \Sigma \frac{2(-1)^m}{(x-p_1)^3}$$

$$D_x^2(i\, cn\, x) = G_2(x) + \Sigma \frac{2(-1)^{m+n}}{(x-p)^3}$$

$$D_x^2(i\, dn\, x) = G_3(x) + \Sigma \frac{2(-1)^n}{(x-p_1)^3}$$

Cela étant je remarque que les trois séries sont des fonctions doublement périodiques

de seconde espèce ayant respectivement les mêmes multiplicateurs que $\operatorname{sn} x$, $\operatorname{cn} x$ et $\operatorname{dn} x$. Considérons par exemple la première $\Sigma \frac{(-1)^m}{(x-p_1)^3}$ le changement de x en $x+2K$ et $x+2iK'$ revient à remplacer m par $m-1$ et n par $n-1$, ce qu'on peut faire puisque la somme s'étend à tous les entiers m et n. Dans le premier cas la série se reproduit sauf le signe, à cause du facteur $(-1)^m$, tandis que dans le second elle a la même valeur, ce qui donne les conditions,

$$G_1(x+2K) = G_1(x), \quad G_1(x+2iK') = -G_1(x)$$

et l'on démontrerait de la même manière les égalités;

$$G_2(x+2K) = -G_2(x), \quad G_2(x+2iK') = -G_2(x),$$

$$G_3(x+2K) = +G_3(x), \quad G_3(x+2iK') = -G_3(x).$$

Or il résulte de l'expression générale des fonctions de seconde espèce obtenue page 230, qu'elles n'existent qu'autant qu'elles admettent des poles, ces trois fonctions sont donc nulles et nous avons simplement:

$$D_x^2(k \operatorname{sn} x) = \Sigma \frac{2(-1)^m}{(x-p_1)^3},$$

$$D_x^2(i \operatorname{cn} x) = \Sigma \frac{2(-1)^{m+n}}{(x-p_1)^3},$$

$$D_x^2(i \operatorname{dn} x) = \Sigma \frac{2(-1)^n}{(x-p_1)^3}.$$

De là on tire en intégrant une première fois à partir de $x=0$:

$$k \operatorname{cn} x \operatorname{dn} x = k - \Sigma(-1)^m \left[\frac{1}{(x-p_1)^2} - \frac{1}{p_1^2}\right],$$

$$i \operatorname{sn} x \operatorname{dn} x = \Sigma(-1)^{m+n} \left[\frac{1}{(x-p_1)^2} - \frac{1}{p_1^2}\right],$$

$$i k^2 \operatorname{sn} x \operatorname{cn} x = \Sigma(-1)^n \left[\frac{1}{(x-p_1)^2} - \frac{1}{p_1^2}\right],$$

puis par une seconde intégration à partir de la même limite:

$$\operatorname{sn} x = x + \frac{1}{k} \Sigma(-1)^m \left[\frac{1}{x-p_1} + \frac{1}{p_1} + \frac{x}{p_1^2}\right]$$

$$\operatorname{cn} x = 1 + \frac{1}{i} \Sigma(-1)^{m+n} \left[\frac{1}{x-p_1} + \frac{1}{p_1} + \frac{x}{p_1^2}\right]$$

$$\operatorname{dn} x = 1 + \frac{1}{ik^2} \Sigma(-1)^n \left[\frac{1}{x-p_1} + \frac{1}{p_1} + \frac{x}{p_1^2}\right]$$

D'autres expressions s'obtiennent en modifiant légèrement le procédé qui vient d'être employé. En intégrant la dérivée seconde de $\operatorname{sn} x$ à partir de $x=-K$, on trouve si l'on pose $p_2 = (2m+1)K + (2n+1)iK'$,

$$k \operatorname{cn} x \operatorname{dn} x = \Sigma(-1)^m \left[\frac{1}{p_2^2} - \frac{1}{(x-p_1)^2}\right],$$

et une nouvelle intégration à partir de $x=0$, donne:

$$k \operatorname{sn} x = \Sigma(-1)^m \left[\frac{1}{x-p_1} + \frac{1}{p_1} + \frac{x}{p_2^2}\right]$$

Sans m'arrêter à ce point, je mentionnerai encore les formules

$$k^2 sn^2 x = \Sigma \left[\frac{1}{(x-p_1)^2} - \frac{1}{p_1^2}\right]$$

$$\frac{1}{sn^2 x} - \frac{1+k^2}{3} = \frac{1}{x^2} + \Sigma \left[\frac{1}{(x-p)^2} - \frac{1}{p^2}\right]$$

La seconde est la conséquence de la relation précédemment établie,

$$D_x^2 Z(x) = A - \frac{1}{x^2} - \Sigma\left[\frac{1}{(x-p)^2} - \frac{1}{p^2}\right]$$

en supposant $a = 2K,\ b = 2iK'$.

On a en effet comme nous l'avons vu :

$$A = \zeta - \frac{1+k^2}{3},\ p = 2mK + 2niK';$$

puis comme nous l'avons démontré, p. 262,

$$D_x Z(x) = \zeta - \frac{1}{sn^2 x},$$

et de là se tire immédiatement l'expression de la fonction $\frac{1}{sn^2 x} - \frac{1+k^2}{3}$ qui donne lieu à une remarque importante. Remplaçons dans le terme général de la Série les entiers m et n par n et $-m$ et mettons en même temps ix au lieu de x. La quantité :

$$\frac{1}{(x-2mK-2niK')^2} - \frac{1}{(2mK+2niK')}$$

devenant,

$$-\frac{1}{(x-2mK'-2niK)^2} + \frac{1}{(2mK'+2niK)}$$

reproduit donc, sauf le signe, la même expression dans laquelle on a permuté K et K'. Le changement de K en K' revient à substituer au module k, son complement k', on a ainsi démontré que la fonction $\frac{1}{sn^2 x} - \frac{1+k^2}{3}$ a cette propriété remarquable de changer seulement de signe, lorsque y remplace x par ix et k par k'

Voici en dernier lieu l'expression générale des fonctions doublement periodiques de première espèce $F(x)$ qui résulte du théorème de Mr Mittag-Leffler. Elle est la conséquence de la relation,

$$F(x) = C + \Sigma\left[R\, Z(x-a) + R_1 D_x Z(x-a) + \dots + R_n D_x^n Z(x-a)\right];$$

la sommation s'étend à tous les pôles placés à l'intérieur du parallélogramme des périodes, et les coefficients $R, R_1, \dots R_n$, sont définis comme on l'a vu par la partie principale du développement suivant les puissances de h de $F(a+h)$ à savoir,

$$R h^{-1} + R_1 D_h h^{-1} + \dots + R_n D_h^n h^{-1},$$

Je remarquerai d'abord qu'on peut écrire :

$$F(x) = C + F_0(x) + D_x F_1(x) + \dots + D_x^n F_n(x)$$

les diverses fonctions dont on a introduit les dérivées successives,

$$F_0(x) = \Sigma R\, Z(x-a)$$
$$F_1(x) = \Sigma R_1 Z(x-a)$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$F_n(x) = \Sigma R_n Z(x-a)$$

n'ayant plus que des pôles simples. Cela étant je considère l'une d'elle $F_k(x)$ et j'introduis la fraction rationnelle suivante :

$$f_k(x) = \Sigma \frac{R_k}{x-a}$$

ainsi que les constantes ;

$$S_k = \Sigma R_k, \qquad S'_k = \Sigma R_k a,$$

un calcul facile conduit en partant de la formule

$$Z(x) = Ax + \frac{1}{x} + \Sigma\left[\frac{1}{x-p} + \frac{1}{p} + \frac{x}{p^2}\right],$$

à l'expression suivante :

$$F_k(x) = A\,\Sigma R_k(x-a) + f_k(x) + \Sigma\left[f_k(x-p) + \frac{S_k}{p} + \frac{S_k x - S'_k}{p^2}\right]$$

d'où l'on tire : $D_x^k F_k(x) = D_x^k f_k(x) + \Sigma D_x^k f(x-p)$

en remarquant que les termes du premier degré en x disparaissent pour k égal ou supérieur à 2. Mais en supposant $k = 1$ nous aurons.

$$D_x F_1(x) = AS_1 + D_x f_1(x) + \Sigma\left[D_x f_1(x-p) + \frac{S}{p^2}\right]$$

et dans le cas de $k = 0$, la condition caractéristique $\Sigma R = 0$ donnera :

$$F_0(x) = -AS'_0 + f_0(x) + \Sigma\left[f_0(x-p) - \frac{S'_0}{p^2}\right]$$

Soit donc en définitive

$$f(x) = f_0(x) + D_x f_1(x) + \cdots + D_x^n f_n(x),$$

nous obtenons au moyen de cette fonction rationnelle, et des constantes

$$G = C - A(S'_0 - S_1), \quad H = S'_0 - S_1,$$

l'expression fort simple

$$F(x) = G + f(x) + \Sigma\left[f(x-p) - \frac{H}{p^2}\right]$$

et l'on a $p = ma + nb$, la sommation s'étendant à toutes les valeurs des entiers m et n à l'exception de $m=0$, $n=0$. Elle montre qu'une fonction doublement périodique correspond à toute fonction rationnelle satisfaisant à la condition que la somme de ses résidus soit nulle.

Additions.

Soit $L = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-l^2\sin^2\varphi}}$ et $L' = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-l'^2\sin^2\varphi}}$ les mêmes quantités que K et K' relativement à un autre module l et à son complément $l' = \sqrt{1-l^2}$. On peut déterminer ce module et la constante M de telle sorte que $sn\left(\frac{x}{M}, l\right)$, $cn\left(\frac{x}{M}, l\right)$, $dn\left(\frac{x}{M}, l\right)$ admettent pour périodes $2K$ et $2iK'$, et s'expriment par conséquent au moyen des fonctions doublement périodiques de module k. Il suffit, qu'on ait, en désignant par a, b, c, d, des nombres

entières, les deux relations:

$$\frac{K}{M} = aL + ibL'$$
$$\frac{iK'}{M} = cL + idL',$$

qui détermineront M et l en fonction de k. Observons toutefois que le coefficient de i dans les quotients $\frac{iK'}{K}$, $\frac{iL'}{L}$ étant assujetti à la condition d'être positif, il est nécessaire que le déterminant $ad-bc$ soit lui-même positif (Voir p. 256). Nous le désignerons par n et en considérant le cas le plus simple de $n=1$; nous nous proposons d'obtenir par une nouvelle voie les expressions de $\operatorname{sn}x$, $\operatorname{cn}x$, $\operatorname{dn}x$, lorsqu'on y introduit L et L' à la place de K et K'

Je suppose à cet effet b et c pairs, a et d impairs; de ces conditions résulte que $\operatorname{sn}(\frac{x}{M}, l)$, $\operatorname{cn}(\frac{x}{M}, l)$, qui sont des fonctions de seconde espèce par rapport aux périodes $2K$ et $2iK'$) auront respectivement les mêmes multiplicateurs que $\operatorname{sn}x$, $\operatorname{cn}x$, $\operatorname{dn}x$. Nous pouvons, par conséquent les exprimer au moyen de ces quantités qui joueront le rôle d'éléments simples, et pour cela il suffit d'avoir les pôles de ces trois fonctions qui sont à l'intérieur du rectangle ou du parallélogramme des périodes et que, pour obréger j'appellerai dorénavant poles principaux. Les valeurs qui les rendent simultanément infinies, sont données par la formule.

$$\frac{x}{M} = fL + igL'$$

f étant supposé pair et g impair; si l'on remplace ensuite ML et iML' par leurs expressions en K et K', $ML = dK - ibK'$, $\quad iML' = -cK + iaK'$
il vient:

$$x = (df - cg)K + i(ag - bf)K'$$

Cela étant, on observe que le coefficient de K est un nombre pair, et le coefficient de iK' impair; il n'existe donc que le seul et unique pôle principal $x = iK'$ qui appartient à chacun des éléments simples. Nous pouvons écrire par conséquent:

$$\operatorname{sn}(\frac{x}{M}, l) = A\operatorname{sn}x,$$
$$\operatorname{cn}(\frac{x}{M}, l) = B\operatorname{cn}x,$$
$$\operatorname{dn}(\frac{x}{M}, l) = C\operatorname{dn}x,$$

A, B, C désignant des constantes. Faisons maintenant dans ces équations $x=0$, après avoir divisé les deux nombres de la première par x, on trouve ainsi:

$$A = \frac{1}{M}, \quad B = 1, \quad C = 1$$

Soit ensuite dans la première: $x = K$, puis $x = K + iK'$; ces valeurs donnent

$$\frac{x}{M} = aL + ibL'$$
$$\frac{x}{M} = (a+c)L + i(b+d)L'$$

il vient donc: $\quad \operatorname{sn}(aL + ibL', l) = (-1)^{\frac{a-1}{2}} = A$

$$\operatorname{sn}[(a+c)L + i(b+d)L', l] = \frac{(-1)^{\frac{a+c-1}{2}}}{l} = \frac{A}{k}$$

nous en concluons :

$$M = (-1)^{\frac{a-1}{2}}, \qquad l = (-1)^{\frac{c}{2}} k.$$

Je fais en dernier lieu $x = K$ dans l'équation $cn\left(\frac{x}{M}, l\right) = cn\,x$, comme on a trouvé : $M = \pm 1$, nous obtenons cette nouvelle conséquence :

$$cn\,(aL + ibL', l) = \frac{(-1)^{\frac{a+b-1}{2}}}{l} = \frac{1}{k'}$$

c'est-à-dire :

$$l' = (-1)^{\frac{a+b-1}{2}} k'$$

De ce que nous venons d'établir résulte que si l'on pose :

$$(-1)^{\frac{a-1}{2}} K = aL + ibL', \qquad (-1)^{\frac{a-1}{2}} iK' = cL + idL',$$

ou bien :

$$L = (-1)^{\frac{a-1}{2}}(dK - ibK') \qquad iL' = (-1)^{\frac{a-1}{2}}(-cK + iaK'),$$

et qu'on représente par $f(x, K, iK')$ l'une quelconque des trois fonctions $sn\,x$, $cn\,x$, $dn\,x$, on a la relation :

$$f(x, K, iK') = f(x, L, iL').$$

C'est le résultat que nous avons obtenu en employant les fonctions de Jacobi ; en effet, l'égalité $ad - bc = 1$, où b et c sont pairs, donne $ad \equiv 1$ et par conséquent $a \equiv d \mod. 4$, de là résulte que les coefficients $(-1)^{\frac{a-1}{2}} d$ et $(-1)^{\frac{a-1}{2}} a$ sont tous deux $\equiv 1 \mod. 4$ comme nous l'avons admis précédemment, p. 251.

Pour familiariser avec ces considérations qui sont le fondement de la théorie de la transformation, j'envisagerai encore avant d'arriver aux questions plus generales deux exemples particuliers importants. Voici le premier

Je prends pour point de départ les équations

$$\frac{K}{M} = L + iL', \qquad \frac{iK'}{M} = iL'$$

qui appartiennent toujours au cas de $ad - bc = 1$, mais les multiplicateurs de $sn\left(\frac{x}{M}, l\right)$, $cn\left(\frac{x}{M}, l\right)$, $dn\left(\frac{x}{M}, l\right)$ sont alors ceux de $sn\,x$, $dn\,x$, et $cn\,x$

J'observe ensuite que les pôles étant donnés par la formule :

$$x = f\,(K - iK') + ig\,K'$$

il n'existe, comme précédemment, que le seul pôle principal $x = iK'$. Nous avons donc en désignant par A, B, C, des constantes :

$$sn\left(\frac{x}{M}, l\right) = A\,sn\,x,$$
$$cn\left(\frac{x}{M}, l\right) = B\,dn\,x,$$
$$dn\left(\frac{x}{M}, l\right) = C\,cn\,x,$$

et en faisant $x = 0$, nous obtenons :

$$A = \frac{1}{M}, \qquad B = 1, \qquad C = 1$$

Posons ensuite dans la première égalité, $x = K$, puis $x = K + iK'$, ce qui donne $\frac{x}{M} = L + iL'$ et $\frac{x}{M} = L + 2iL'$; on trouve ainsi :

$$\frac{1}{l} = A, \qquad 1 = \frac{A}{k}.$$

De là résulte :

$$l = \frac{1}{k}, \qquad M = \frac{1}{k}, \qquad A = k,$$

et par conséquent ces relations :

$$sn\left(kx, \frac{1}{k}\right) = k\, sn\, x, \qquad cn\left(kx, \frac{1}{k}\right) = dn x, \qquad dn\left(kx, \frac{1}{k}\right) = cn x.$$

Soit en dernier lieu :

$$\frac{K}{M} = -i L', \qquad \frac{iK'}{M} = L\,;$$

la formule représentant les pôles étant alors :

$$x = -gK + i f K'$$

nous avons puisque f est pair et g impair, $x = K$ pour pôle principal. Les multiplicateurs de $sn\left(\frac{x}{M}, l\right)$ $cn\left(\frac{x}{M}, l\right)$ $dn\left(\frac{x}{M}, l\right)$ sont ensuite ceux de $dn x$, $cn x$ et $sn x$, ce qui conduit aux relations suivantes :

$$sn\left(\frac{x}{M}, l\right) = A\, dn\,(x - K + iK')$$
$$cn\left(\frac{x}{M}, l\right) = B\, cn\,(x - K + iK')$$
$$dn\left(\frac{x}{M}, l\right) = l\, sn\,(x - K + iK')$$

En modifiant les constantes elles prennent au moyen des formules de la page 238 cette nouvelle forme

$$sn\left(\frac{x}{M'}, l\right) = \frac{A\, sn x}{cn x}$$

$$cn\left(\frac{x}{M}, l\right) = \frac{B}{cn x}$$

$$dn\left(\frac{x}{M}, l\right) = \frac{C\, dn x}{cn x}$$

cela étant la supposition de $x = 0$ donne

$$A = \frac{1}{M'}, \quad B = 1, \quad C = 1$$

Faisons ensuite dans la première égalité $x = iK'$ et $x = K + iK'$, on aura :

$$sn\,(L, l) = 1 = iA,$$
$$sn\,(L + iL', l) = \frac{1}{l} = \frac{iA}{k'}.$$

De là nous concluons :

$$l = k', \qquad M = i, \qquad A = \frac{1}{i},$$

et par conséquent ces résultats d'une grande importance

$$sn\,(ix, k') = \frac{i\, sn x}{cn x}$$

$$cn\,(ix, k') = \frac{1}{cn x}$$

$$dn\,(ix; k') = \frac{dn x}{cn x}$$

On remarquera que la première relation se met sous la forme :

$$\frac{1}{sn^2(ix, k')} + \frac{1}{sn^2 x} = 1$$

et l'on en tire aisément l'égalité :

$$\frac{1}{sn^2(ix,k')} - \frac{1+k'^2}{3} = -\left(\frac{1}{sn^2 x} - \frac{1+k^2}{3}\right)$$

à laquelle nous sommes déjà parvenu, p. 264 par une toute autre voie.

Posons avec Mr. Weierstrass :

$$p(x,k) = \frac{1}{sn^2 x} - \frac{1+k^2}{3}$$

on aura ces conditions caractéristiques :

$$p(ix,k') = -p(x,k),$$

$$p\left(kx,\frac{1}{k}\right) = k^2 p(x,k),$$

qui donnent l'origine du rôle propre et véritablement fondamental de cette nouvelle expression. Je renvoie à l'ouvrage mémorable d'Halphen : Traité des fonctions elliptiques et de leurs applications, où l'on verra que son introduction comme un élément analytique nécessaire est justifié par de grands avantages dans beaucoup de questions de la plus haute importance, en me bornant à indiquer une conséquence facile concernant la série :

$$p(x) = \frac{1}{x^2} + \frac{1-k^2+k^4}{15}x^2 + \frac{2-3k^2-3k^4+2k^6}{189}x^4 + \frac{2(1-k^2+k^4)^2}{675}x^6 + \cdots,$$

je représenterai par $\Phi(k^2)$ le coefficient de la puissance x^{2n-2} qui devra vérifier les deux équations :

$$k^{2n}\Phi\left(\frac{1}{k^2}\right) = \Phi(k^2),$$

$$\Phi(1-k^2) = (-1)^n \Phi(k^2).$$

La première montre d'abord que $\Phi(K^2)$ est un polynôme réciproque du n^e degré par rapport à K^2 ; en considérant ensuite la seconde je distinguerai deux cas suivant que n est pair ou impair. Je remarquerai qu'ayant dans la seconde hypothèse :

$$\Phi(1-k^2) = -\Phi(k^2),$$

on en conclut que l'équation $\Phi(k^2) = 0$, est vérifiée pour $k^2 = \frac{1}{2}$; on voit de plus qu'étant réciproque elle admet la racine $K^2 = 2$, et enfin la solution $K^2 = -1$, puisqu'elle est supposée de degré impair. Soit donc,

$$\varphi(k^2) = (1-2k^2)(2-k^2)(1+k^2)$$
$$= 2-3k^2-3k^4+2k^6,$$

nous pouvons écrire :

$$\Phi(k^2) = \varphi(k^2)\,\Phi_0(k^2)$$

en désignant par $\Phi_0(k^2)$ un nouveau polynôme pour lequel on aura :

$$\Phi_0(1-k^2) = \Phi_0(k^2)$$

puisque $\varphi(k^2)$ change de signe, en changeant k^2 en $1-k^2$. Le cas de n impair se

trouve ainsi ramené au premier que nous allons maintenant traiter.

Posons $n = 2p$ et soit A une constante arbitraire, j'observe que les conditions proposées ne cessent pas d'être remplies, si l'on remplace $\Phi(k^2) - A(1-k^2+k^4)^p$ de sorte qu'en posant :

$$\Phi(k^2) - A(1-k^2+k^4)^p = \Phi_1(k^2),$$

on aura encore :

$$k^{2n}\Phi_1\left(\frac{1}{k^2}\right) = \Phi_1(k^2)$$

$$\Phi_1(1-k^2) = \Phi_1(k^2)$$

Cela posé, disposons de A de manière que $\Phi_1(k^2)$ admette la racine $k^2=0$, la seconde égalité fait voir qu'on introduira en même temps la racine $k^2=1$, de sorte que nous pouvons écrire :

$$\Phi_1(k^2) = k^2(1-k^2)\,\Phi_2(k^2)$$

Or à l'égard du nouveau polynôme, on trouve les conditions :

$$k^{2n-6}\Phi_2\left(\frac{1}{k^2}\right) = -\Phi_2(k^2),$$

$$\Phi_2(1-k^2) = \Phi_2(k^2);$$

la première montre qu'en faisant $k^2=1$, $\Phi_2(k^2)$ s'annule, et de la seconde on conclut l'existence de la racine $k^2=0$. Le polynôme $\Phi_2(k^2)$ contient donc le facteur $k^2(1-k^2)$; nous devons faire par suite : $\Phi_1(k^2) = k^4(1-k^2)^2\,\Phi_3(k^2)$,

d'où ces égalités

$$k^{2n-12}\Phi_3(k^2) = \Phi_3(k^2);$$

$$\Phi_3(1-k^2) = \Phi_3(k^2).$$

Elles font voir que $\Phi_3(k^2)$ est de même nature que $\Phi(k^2)$, mais de degré $n-6$ en k^2, de sorte qu'en continuant le même raisonnement, on arrive de proche en proche à l'expression suivante :

$$\begin{aligned}\Phi(k^2) = {} & A(1-k^2+k^4)^p \\ & + A_1(1-k^2+k^4)^{p-3}k^4(1-k^2)^2 \\ & + A_2(1-k^2+k^4)^{p-6}k^8(1-k^2)^4 \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + A_r(1-k^2+k^4)^{p-3r}k^{4r}(1-k^2)^{2r}\end{aligned}$$

où r désigne l'entier contenu dans $\frac{p}{3}$. C'est le résultat que je me suis proposé d'obtenir, il donne comme cas particulier l'identité suivante qu'il n'est pas inutile de remarquer :

$$\left[(1-2k^2)(2-k^2)(1+k^2)\right]^2 = 4(1-k^2+k^4)^2 - 27k^4(1-k^2)^2$$

J'arrive maintenant aux cas plus généraux dans la théorie de la transformation, et je me propose d'obtenir par les fonctions relatives au module k, les

quantités $sn\left(\frac{x}{M},l\right)$, $cn\left(\frac{x}{M},l\right)$, $dn\left(\frac{x}{M},l\right)$, en supposant que dans les relations précédemment posées :

$$\frac{K}{M} = aL + ibL',$$
$$\frac{iK'}{M} = cL + idL',$$

le déterminant $ad - bc$ soit un nombre impair quelconque. Il faut alors admettre que ad et bc ne sont point de même parité, ce qui amène à distinguer deux cas différents suivant qu'on aura $ad \equiv 1$ ou $ad \equiv$, Mod 2. C'est seulement dans la première hypothèse que les fonctions $sn\left(\frac{x}{M},l\right)$, $cn\left(\frac{x}{M},l\right)$, $dn\left(\frac{x}{M},l\right)$, considérées comme étant de seconde espèce, par rapport aux périodes $2K$ et $2iK'$, pourront avoir les mêmes multiplicateurs que snx, cnx, dnx, et j'ajoute que la condition de a et d impairs ne suffit pas. On voit en effet par les égalités :

$$\begin{cases} sn\left(\frac{x+2K}{M},l\right) = -sn\left(\frac{x}{M},l\right) \\ sn\left(\frac{x+2iK'}{M},l\right) = (-1)^c sn\left(\frac{x}{M},l\right), \end{cases}$$

$$\begin{cases} cn\left(\frac{x+2K}{M},l\right) = -(-1)^b cn\left(\frac{x}{M},l\right) \\ cn\left(\frac{x+2iK'}{M},l\right) = -(-1)^c cn\left(\frac{x}{M};l\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} dn\left(\frac{2+2K}{M},l\right) = -(-1)^b dn\left(\frac{x}{M},l\right) \\ dn\left(\frac{x+2iK'}{M},l\right) = -dn\left(\frac{x}{M},l\right) \end{cases}$$

qu'il est nécessaire en outre que b et c soient pairs. Le cas spécial que je vais considérer est donc caractérisé par les conditions :

$$a \equiv 1, \quad d \equiv 1, \quad b \equiv 0, \quad c \equiv 0, \text{ Mod } 2$$

et alors nous aurons d'après les expressions relatives aux fonctions de seconde espèce, les formules suivantes :

$$sn\left(\frac{x}{M},l\right) = \Sigma R\, sn(x-p+iK')$$
$$cn\left(\frac{x}{M},l\right) = \Sigma S\, cn(x-p+iK')$$
$$dn\left(\frac{x}{M},l\right) = \Sigma T\, dn(x-p+iK')$$

où les sommes se rapportent aux divers pôles p qui sont à l'intérieur du parallélogramme des périodes, $2K$ et $2iK'$. La détermination des quantités p, étant le point essentiel dans la question qui nous occupe, je la traiterai avec quelques développements.

Si l'on désigne par f et g des entiers dont le premier soit pair et le second impair, les pôles des trois fonctions sont donnés par l'égalité :

$$\frac{p}{M} = fL + igL'$$

et nous aurons ensuite en introduisant K et K', au lieu de L et L' :

$$p = \frac{(df - cg)K}{n} + i\,\frac{(ag - bf)K'}{n}$$

Cette expression ne permet pas de reconnaître immédiatement les valeurs de f et g pour lesquelles les coefficients $df - cg$ et $ag - bf$, ne diffèrent que par des multiples pairs de n. Nous lui donnerons dans ce but une autre forme, nous introduirons de nouvelles indéterminées ξ et ζ par la substitution suivante :

$$f = A\xi + B\zeta,$$
$$g = C\xi + D\zeta,$$

où, A, B, C, D sont des entiers tels qu'on ait, $AD - BC = 1$; ils s'obtiennent comme je vais le dire.

Ayant posé $ad - bc = n$, je désigne par n' le plus grand commun diviseur de c et d, puis en observant que les quotients $\frac{c}{n'}$, $\frac{d}{n'}$ sont premiers entre eux, je détermine r et s, de manière à avoir :

$$\frac{d}{n'}\,r - \frac{c}{n'}\,s = 1$$

ce qui donne :

$$dr - cs = n'$$

Soit enfin, $m = br - as$, et $n = n'n''$, je dis que si l'on prend :

$$A = r + \frac{\alpha c}{n'}, \qquad B = 4a + \beta c,$$
$$C = s + \frac{\alpha d}{n'}, \qquad D = 4b + \beta d,$$

les entiers α et β, peuvent s'obtenir de telle sorte qu'on ait, $AD - BC = 1$.

Nous avons en effet :

$$AD - BC = 4(br - as) + \beta(dr - cs) + \frac{4\alpha(bc - ad)}{n'}$$
$$= 4m + \beta n' - 4\alpha n''$$

d'où l'équation :

$$\beta n' - 4\alpha n'' = 1 - 4m.$$

On voit qu'il est toujours possible d'y satisfaire, lorsque les diviseurs n' et n'' de n sont premiers entre eux, et par conséquent dans le cas auquel je puis me borner, où n n'a que des facteurs premiers simples.

Ces résultats établis, voici l'expression des pôles qui résulte de l'introduction des indéterminées ξ et ζ. On trouve d'abord :

$$p = \xi\,\frac{(Ad - Cc)K + i(Ca - Ab)K'}{n}$$
$$+ \zeta\,\frac{(Bd - Dc)K + i(Da - Bb)K'}{n},$$

un calcul facile donne ensuite :

$$Ad - Cc = n', \qquad Ca - Ab = \alpha n'' - m$$
$$Bd - Dc = 4n, \qquad Da - Bb = \beta n,$$

la nouvelle formule est donc :

$$p = \xi \frac{n'K + i(\alpha n'' - m)K'}{n} + \zeta(4K + i\beta K')$$

Une dernière remarque nous reste à faire avant de l'employer. On a admis les conditions, $c \equiv 0$, $d \equiv 1$ Mod 2 ; les égalités $dr - cs = n'$, $\beta n' - 4\alpha n'' = 1 - 4m$, montrent ensuite que r et γ sont impairs ; nous avons par-conséquent : $A \equiv 1$, $B \equiv 0$, $D \equiv 1$, Mod 2. Cela étant on conclut de l'égalité $f = A\xi + B\zeta$, que f étant pair il en est de même de ξ, la relation $g = C\xi + D\zeta$, fait voir ensuite que ζ est impair. Nous pouvons maintenant tirer de l'expression de p les conséquences qui s'offrent d'elles mêmes. Il est clair qu'il suffit de donner une seule valeur à ζ, par exemple $\zeta = 1$ et de prendre $\xi = 0, 2, 4, \ldots 2n-2$, ce qui donne n pôles qu'on prouve aisement être distincts. Car autrement nous aurions en supposant ξ et ξ_1 moindres que n, les conditions :

$$\left.\begin{array}{l} \xi n' \equiv \xi_1 n'' \\ \xi(\alpha n'' - m) \equiv \xi_1(\alpha n' - m) \end{array}\right\} \text{Mod } n$$

De la première on tire $\xi_1 = \xi + \lambda n'$, où λ est inférieur à n', et la seconde donne ensuite : $\lambda(\alpha n'' - m) \equiv 0$, Mod n', ce qui est impossible, $\alpha n'' - m$ étant premier à n', comme le montre l'égalité : $4(\alpha n'' - m) = \beta n' - 1$. Ces pôles toutefois ne sont point nécessairement à l'intérieur du parallélogramme des périodes, mais il est évident qu'il n'est aucunement nécessaire de s'assujétir à une telle restriction. Considérons par exemple la formule,

$$sn\left(\frac{x}{M}, l\right) = \Sigma R \; sn(x - p + iK') ;$$

la substitution au pôle p d'un autre qui lui est équivalent, comme $p + 2K$, a seulement pour effet de changer le signe du coefficient R ; or cette constante se déterminera toujours, quelque soit la valeur adoptée pour p, en faisant $x = p + \varepsilon$, et en égalant dans les deux membres les termes en $\frac{1}{\varepsilon}$. Au moyen de cette remarque nous allons obtenir les résultats mémorables découverts par Jacobi qui sont démontrés dans les Fundamenta.

Nous prendrons pour ξ la suite des multiples de 4 qui donnent un système de résidus suivant le module n, et nous remplacerons la valeur $\zeta = 1$, par $\zeta = n'$. Soit $\xi = -4q$ et remarquons que l'on a $\gamma n' \equiv 1$, Mod 4 les pôles seront désormais les quantités :

$$p = -4q \frac{n'K + i(\alpha n'' - m)K'}{n} + iK'$$

où nous supposerons $q = 0, 1, 2, \ldots n-1$. A cette valeur je joindrai aussi l'expression qu'on tire de l'égalité :

$$\frac{p}{M} = (A\xi + B\zeta)L + i(C\xi + D\zeta)L'$$

lorsqu'on supprime les termes en L et L' dont les coefficients sont des multiples de 4. En employant à cet effet les relations :

$$\left.\begin{array}{l} Bn' = (4a + \beta c)n' \equiv c \\ Dn' = (4b + \beta d)n' \equiv d \end{array}\right\} \text{Mod } 4$$

on aura simplement :

$$\frac{p}{M} = iL + i\alpha L'.$$

Ceci posé revenons aux trois formules :

$$sn\left(\frac{x}{M}, l\right) = \Sigma R \; sn\,(x - p + iK')$$

$$cn\left(\frac{x}{M}, l\right) = \Sigma S \; cn\,(x - p + iK')$$

$$dn\left(\frac{x}{M}, l\right) = \Sigma T \; dn\,(x - p + iK')$$

afin de donner la détermination des coefficients R, S, et T. On fera dans ce but $x = p + \varepsilon$ et, au moyen des équations élémentaires :

$$sn\,(iK' + \varepsilon) = \frac{1}{k\, sn\,\varepsilon},$$

$$cn\,(iK' + \varepsilon) = \frac{dn\,\varepsilon}{i\,k\, sn\,\varepsilon},$$

$$dn\,(iK' + \varepsilon) = \frac{cn\,\varepsilon}{i\, sn\,\varepsilon}.$$

nous trouverons pour ε infiniment petit les égalités suivantes :

$$\frac{M}{l} = \frac{R}{k},$$

$$\frac{(-1)^{\frac{c+d-1}{2}} M}{il} = \frac{S}{ik}$$

$$\frac{(-1)^{\frac{d-1}{2}} M}{i} = \frac{T}{i}$$

On en conclut en posant pour abréger : $\omega = \dfrac{n'K + i(\alpha n'' - m)K'}{n}$, ces expressions que je me suis proposé d'obtenir

$$sn\left(\frac{x}{M}, l\right) = \frac{Mk}{l} \; \Sigma\, sn(x + 4\omega)$$

$$cn\left(\frac{x}{M}, l\right) = \frac{(-1)^{\frac{c+d-1}{2}} Mk}{l} \Sigma\, cn(x + 4q\omega)$$

$$dn\left(\frac{x}{M}, l\right) = (-1)^{\frac{d-1}{2}} M \; \Sigma\, dn\,(x + 4q\omega)$$

$$(q = 0, 1, 2, \ldots \quad n-1)$$

Elles donnent lieu à une remarque que je ne dois pas omettre ; il est necessaire pour qu'elles coincident avec celles des Fundamenta qu'on ait $c \equiv 0$ et $d \equiv n$, mod 4. Mais l'égalité $ad - bc = n$ donnant $ad \equiv n$ Mod 4, $a \equiv 1$ Mod 4 ; les formules de Jacobi pour la transformation conduisent donc à cette conclusion, qui dans les relations :

$$\frac{K}{M} = aL + ibL',$$

$$\frac{iK'}{M} = cL + idL',$$

on a nécessairement $a \equiv 1$, $b \equiv 0$ Mod 4 et $d \equiv 1$, $b' \equiv 0$, Mod 2. La méthode qui vient d'être exposée s'applique aux divers cas que présente l'égalité $ad - bc = n$; je me contenterai d'en considérer un seul pour servir d'exemple en admettant les conditions suivantes :

$$a \equiv 1,\ b \equiv 0,\ c \equiv 1,\ d \equiv 1,\ \text{Mod } 2.$$

Les multiplicateurs de $sn\left(\frac{x}{M}, l\right)$ et $cn\left(\frac{x}{M}, l\right)$ sont alors ceux de cnx et snx puisqu'on a les égalités :

$$\begin{cases} sn\left(\frac{x+2K}{M}, l\right) = -sn\left(\frac{x}{M}, l\right) \\ sn\left(\frac{x+2iK'}{M}, l\right) = -sn\left(\frac{x}{M}, l\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} cn\left(\frac{x+2K}{M}, l\right) = -cn\left(\frac{x}{M}, l\right) \\ cn\left(\frac{x+2iK'}{M}, l\right) = cn\left(\frac{x}{M}, l\right) \end{cases}$$

et nous aurons par conséquent les formules :

$$sn\left(\frac{x}{M}, l\right) = \Sigma R\, cn(x - p + iK')$$

$$cn\left(\frac{x}{M}, l\right) = \Sigma S\, sn(x - p + iK')$$

$$dn\left(\frac{x}{M}, l\right) = \Sigma T\, dn(x - p + iK')$$

Cela étant, je prends comme il est toujours possible, parmi les divers solutions des équations, $dr - cs = n'$ et $\beta n' - 4\alpha n'' = 1 - 4m$, des entiers r et α qui soient multiples de 4, et j'observe qu'ayant $\beta n' \equiv 1$ $cs = -n'$, Mod. 4, on en conclut : $\beta \equiv n'$ et $s \equiv -n'c$. Les valeurs A, B, C, D, nous donnent par suite :

$$A \equiv 0,\quad C = -n'c,\quad B = n'c,\quad D = n'c, \quad \text{mod } 4$$

et de là résulte, en recourant aux égalités

$$f = A\xi + B\zeta,$$
$$g = C\xi + D\zeta,$$

que ζ doit être supposé pair et ξ impair. L'expression des pôles n'est donc plus le même que tout à l'heure, nous ferons $\zeta = 0$ et $\xi = -(4q+1)$, en remarquant que pour $q = 0, 1, 2, \ldots\ n-1$, on obtient un système de résidus suivant le module n. On aura ainsi :

$$p = -(4q+1)\frac{n'K + i(\alpha n'' - m)K'}{n}$$

puis en négligeant les multiples de 4, on tirera de l'égalité

$$\frac{p}{M} = (A\xi + B\zeta)L + i(C\xi + D\zeta)L'$$

la valeur :

$$\frac{p}{M} = i n' c L'$$

Celà étant, le même calcul que précédemment nous donne d'abord :

$$R = \frac{iMk}{l}$$

$$S = \frac{\varepsilon Mk}{l}$$

$$T = \varepsilon M$$

où j'ai posé pour abréger : $\varepsilon = (-1)^{\frac{n'c-1}{2}}$; nous ferons ensuite :

$$\omega = \frac{n'K + i(\alpha n'' - m)K}{n} + iK'$$

$$= \frac{n'K + i(\alpha n'' - m + n)K}{n}$$

ou bien :

$$\omega = \frac{n'K + 2t\, iK'}{n},$$

en désignant par $2t$ l'entier $\alpha n'' - m + n$ qui est pair, puisque $m = br - as$ est un nombre impair. On trouve ainsi, au moyen de la relation identique,

$$p - iK' = -(4q+1)\omega + 4q\, iK'$$

les formules suivantes, où je remplace $4q+1$ par ξ, afin d'abréger l'écriture.

$$sn\left(\frac{x}{M}, l\right) = \frac{iMk}{l} \sum cn[x + \xi\omega]$$

$$cn\left(\frac{x}{M}, l\right) = \frac{\varepsilon Mk}{l} \sum sn[x + \xi\omega]$$

$$dn\left(\frac{x}{M}, l\right) = \varepsilon M \sum dn[x + \xi\omega]$$

$$(\xi = 1, 5, 9, \ldots\ldots 4(n-1)+1)$$

Changeons maintenant x en $-x$, il viendra ;

$$sn\left(\frac{x}{M}, l\right) = -\frac{iMk}{l} \sum cn[x - \xi\omega]$$

$$cn\left(\frac{x}{M}, l\right) = -\frac{\varepsilon Mk}{l} \sum sn[x - \xi\omega]$$

$$dn\left(\frac{x}{M}, l\right) = \varepsilon M \sum dn[x - \xi\omega].$$

et ces égalités combinées avec les précédentes nous donneront :

$$2\, sn\left(\frac{x}{M}, l\right) = \frac{iMk}{l} \sum [cn(x - \xi\omega) - cn(x + \xi\omega)]$$

$$2\, cn\left(\frac{x}{M}, l\right) = \frac{\varepsilon Mk}{l} \sum [sn(x + \xi\omega) - sn(x - \xi\omega)]$$

$$2\, dn\left(\frac{x}{M}, l\right) = \varepsilon M \sum [dn(x + \xi\omega) - dn(x + \xi\omega)]$$

On en déduit immédiatement au moyen des relations connues ces expressions :

$$sn\left(\frac{x}{M}, l\right) = \frac{iMk}{l} \sum \frac{sn\,\xi\omega\; dn\,\xi\omega\; sn\,x\; dn\,x}{1 - k^2 sn^2\xi\omega\, sn^2 x},$$

$$cn\left(\frac{x}{M}, l\right) = \frac{\varepsilon Mk}{l} \sum \frac{sn\,\xi\omega\; cn\,x\; dn\,x}{1 - k^2 sn^2\xi\omega\, sn^2 x},$$

$$dn\left(\frac{x}{M}; l\right) = \varepsilon M \sum \frac{dn\,\xi\omega\; dn\,x}{1 - k^2 sn^2\xi\omega\, sn^2 x}.$$

où il faut supposer : $\xi = 1, 5, 9 \ldots\ldots 4(n-1)+1$.

Les résultats qui viennent d'être obtenus mettent en évidence deux genres différents de formules dans la théorie de la transformation, les unes contenant des multiples de la forme $4q$ et les autres les multiples $4q+1$ de la constante ω. Les deux cas ont lieu suivant que dans la formule,

$$p = \xi \frac{n'K + i(\alpha n'' - m)K'}{n} + \zeta(4K + i\beta K')$$

le nombre ξ est pair ou impair. Je remarque à ce sujet que les égalités :

$$f = A\xi + B\zeta,$$
$$g = C\xi + D\zeta,$$

où f est pair et g impair, donnant inversement :

$$\xi = Df - Bg,$$
$$\zeta = Ag - Cf,$$

on en conclut :

$$\xi \equiv B \qquad \text{Mod } 2.$$

Mais nous avons $B = 4a + \beta c$, on sait aussi que β est impair, il vient par conséquent :

$$\xi \equiv c \qquad \text{Mod } 2.$$

Cela étant, et en considérant les six cas que présente l'équation $ad - bc = n$ suivant les valeurs de a, b, c, d, par rapport au module 2, on voit qu'il s'en trouve deux seulement où c soit un nombre pair, et où les relations :

$$\frac{K}{M} = aL + ibL',$$

$$\frac{iK'}{M} = cL + idL'$$

conduisent à des formules semblables à celles de Jacobi. C'est encore de ces égalités que je vais partir pour exposer la théorie de la transformation, sous un autre point de vue, sans admettre aucune restriction à l'égard de n qui pourra être supposé pair ou impair. Je ferai usage à cet effet des expressions de $sn\left(\frac{x}{M}, l\right)$, $cn\left(\frac{x}{M}, l\right)$, $dn\left(\frac{x}{M}, l\right)$ par $\Theta\left(\frac{x}{M}, l\right)$, $H\left(\frac{x}{M}, l\right)$, $\Theta_1\left(\frac{x}{M}, l\right)$, $H_1\left(\frac{x}{M}, l\right)$, j'introduirai la fonction suivante :

$$\Phi(x) = \Theta\left(\frac{x}{M}, l\right) e^{\frac{i\pi b x^2}{4KLM}}$$

et je poserai :

$$sn\left(\frac{x}{M}, l\right) = \frac{\Pi(x)}{\Phi(x)},$$

$$cn\left(\frac{x}{M}, l\right) = \frac{\Pi_1(x)}{\Phi(x)},$$

$$dn\left(\frac{x}{M}, l\right) = \frac{\Phi_1(x)}{\Phi(x}.$$

Cela étant, voici les propriétés caractéristiques des quatres quantités $\Phi(x)$, $\Pi(x)$, $\Phi_1(x)$, $\Pi_1(x)$,

concernant le changement de x en $x+2K$ et $x+2iK'$, qu'il est nécessaire d'établir.

Elles découlent de la formule,

$$\Theta\left(\frac{x}{M}, l\right) = \Sigma(-1)^m e^{\frac{i\pi m x}{ML} - \frac{\pi m^2 L'}{L}}$$

$$(m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\ldots)$$

d'où l'on tire :

$$\phi(x) = \Sigma(-1)^m e^{i\pi\varphi(x,m)}$$

en faisant :

$$\varphi(x,m) = \frac{b x^2}{4KLM} + \frac{mx}{LM} + \frac{i m^2 L'}{L}.$$

Je remarque que si l'on ordonne successivement par rapport à $2K$ et à b nous trouverons :

$$\varphi(x+2K, m) = \varphi(x) + 2K\left(\frac{bx}{2KLM} + \frac{m}{LM}\right) + \frac{bK}{LM}$$

$$\varphi(x, m+b) = \varphi(x) + b\left(\frac{x}{LM} + \frac{2imL'}{L}\right) + \frac{ib^2L'}{L}$$

ou bien :

$$\varphi(x+2K, m) = \varphi(x) + \frac{bx}{LM} + \frac{(2m+b)K}{LM},$$

$$\varphi(x, m+b) = \varphi(x) + \frac{bx}{LM} + \frac{ib(2m+b)L'}{L}.$$

En retranchant membre à membre, la variable x s'élimine et il vient :

$$\varphi(x+2K, m) - \varphi(x, m+b) = (2m+b)\left(\frac{K}{ML} - \frac{ibL'}{L}\right),$$

mais on a : $\frac{K}{ML} = a + \frac{ibL'}{L}$, ce qui donne :

$$\varphi(x+2K, m) = \varphi(x, m+b) + (2m+b)a$$

Nous pouvons donc écrire :

$$\phi(x+2K) = \Sigma(-1)^m e^{i\pi\varphi(x+2K,m)}$$

$$= \Sigma(-1)^m e^{i\pi[\varphi(x,m+b)+(2m+b)a]}$$

de sorte qu'en changeant m en $m-b$, comme il est permis on obtient la relation cherchée :

$$\phi(x+2K) = (-1)^{ab+b}\phi(x)$$

Ce point établi, les résultats analogues concernant les trois autres fonctions se tirent immédiatement des égalités qui ont été déjà employées.

$$sn\left(\frac{x+2K}{M}, l\right) = (-1)^a sn\left(\frac{x}{M}, l\right)$$

$$cn\left(\frac{x+2K}{M}, l\right) = (-1)^{a+b} cn\left(\frac{x}{M}, l\right)$$

$$dn\left(\frac{x+2K}{M}, l\right) = (-1)^b dn\left(\frac{x}{M}, l\right)$$

et nous parvenons ainsi à ce premier système d'égalités :

$$\left\{\begin{aligned} \Phi(x+2K) &= (-1)^{ab+b}\,\Phi(x),\\ \Pi(x+2K) &= (-1)^{ab+a+b}\,\Pi(x),\\ \Pi_1(x+2K) &= (-1)^{ab+a}\,\Pi_1(x),\\ \Phi_1(x+2K) &= (-1)^{ab}\,\Phi_1(x). \end{aligned}\right.$$

Soit ensuite,

$$\Phi(x)\,e^{\frac{\pi n x^2}{4KK'}} = \Sigma(-1)^m e^{i\pi\Psi(x,m)}$$

de sorte qu'on ait :

$$\Psi(x,m) = -\frac{inx^2}{4KK'} + \varphi(x,m)$$

$$= \frac{bK'-in\,LM}{4KK'LM}\,x^2 + \frac{mx}{LM} + \frac{im^2L'}{L},$$

ou plus simplement :

$$\Psi(x,m) = -\frac{idx^2}{4K'LM} + \frac{mx}{LM} + \frac{im^2L'}{L},$$

en recourant à l'égalité, $nLM = dK - ibK'$. Un calcul semblable à celui que nous venons de voir donne :

$$\Psi(x+2iK',m) = \Psi(x,m) + \frac{dx}{LM} + \frac{i(2m+d)K'}{LM},$$

$$\Psi(x,m+d) = \Psi(x,m) + \frac{dx}{LM} + \frac{id(2m+d)L'}{L}$$

d'où résulte :

$$\Psi(x+2iK',m) - \Psi(x,m+d) = (2m+d)\left(\frac{iK'}{LM} - \frac{idL'}{L}\right)$$

En remarquant donc que l'on a : $\frac{iK'}{LM} = c + \frac{idL'}{L}$, nous tirons de cette relation :

$$\Psi(x+2iK',m) = \Psi(x,m+d) + (2m+d)c,$$

et nous obtenons par conséquent :

$$\Phi(x+2iK')\,e^{\frac{\pi n(x+2iK')^2}{4KK'}} = (-1)^{cd+d}\,\Phi(x)\,e^{\frac{\pi n x^2}{4KK'}}$$

Représentons toujours par λ le facteur exponentiel, $e^{-\frac{i\pi(x+iK')}{K}}$ cette équation prend la forme simple :

$$\Phi(x+2iK') = (-1)^{cd+d}\,\lambda^n\,\Phi(x),$$

et les égalités :

$$sn\left(\frac{x+2iK'}{M},l\right) = (-1)^c\,sn\left(\frac{x}{M},l\right)$$

$$cn\left(\frac{x+2iK'}{M},l\right) = (-1)^{c+d}\,cn\left(\frac{x}{M},l\right)$$

$$dn\left(\frac{x+2iK'}{M},l\right) = (-1)^d\,dn\left(\frac{x}{M},l\right)$$

conduisent ensuite au second système d'équations que j'avais en vue d'établir :

$$\Phi(x+2iK') = (-1)^{cd+d}\lambda^n \Phi(x)$$
$$\Pi(x+2iK') = (-1)^{cd+c+d}\lambda^n \Pi(x)$$
$$\Pi_1(x+2iK') = (-1)^{cd+c}\lambda^n \Pi_1(x)$$
$$\Phi_1(x+2iK') = (-1)^{cd}\lambda^n \Phi_1(x)$$

Voici les conséquences qui en résultent. J'envisage les quantités suivantes :

$$P(x) = \frac{\Pi(x)}{\Theta^n(x)},$$

$$Q(x) = \frac{\Pi_1(x)}{\Theta^n(x)},$$

$$R(x) = \frac{\Phi_1(x)}{\Theta^n(x)},$$

$$S(x) = \frac{\Phi(x)}{\Theta^n(x)},$$

au moyen desquelles on obtient :

$$sn\left(\frac{x}{M}, l\right) = \frac{P(x)}{S(x)},$$

$$cn\left(\frac{x}{M}, l\right) = \frac{Q(x)}{S(x)},$$

$$dn\left(\frac{x}{M}, l\right) = \frac{R(x)}{S(x)}.$$

Ce sont des fonctions doublement périodiques de première ou de seconde espèce, qui n'admettent qu'un seul pole $x = iK'$, avec l'ordre de multiplicité n, sauf les cas où l'un des numérateurs s'annule pour cette même valeur, l'ordre de multiplicité étant alors $n-1$. Nous avons en effet les égalités :

$$\begin{cases} P(x+2K) = (-1)^{ab+a+b} P(x) \\ P(x+2iK') = (-1)^{cd+c+d+n} P(x) \end{cases}$$

$$\begin{cases} Q(x+2K) = (-1)^{ab+a} Q(x) \\ Q(x+2iK') = (-1)^{cd+c+n} Q(x) \end{cases}$$

$$\begin{cases} R(x+2K) = (-1)^{ab} R(x) \\ R(x+2iK') = (-1)^{cd+n} R(x) \end{cases}$$

$$\begin{cases} S(x+2K) = (-1)^{ab+b} S(x) \\ S(x+2iK') = (-1)^{cd+d+n} S(x). \end{cases}$$

Elles montrent que le problème de la transformation, dans le cas général où n

est un entier pair ou impair, se trouve ramené à obtenir l'expression de ces fonctions doublement périodiques particulières, auxquelles on pourrait donner la dénomination d'unipolaires. La décomposition en éléments simples donne cette expression, voici les résultats auxquels elle conduit :

En considérant d'abord les fonctions de première espèce que je désigne par $f(x)$, on a d'après la formule générale :

$$f(x) = A_0 + A_1\frac{\Theta'(x)}{\Theta(x)} + A_2 D_x\left[\frac{\Theta'(x)}{\Theta(x)}\right] + \dots + A_n D_x^{n-1}\left[\frac{\Theta'(x)}{\Theta(x)}\right]$$

mais le coefficient A_1 est nul puisqu'il représente le résidu correspondant à un pôle unique, dans le parallélogramme des périodes. On a ensuite :

$$D_x\left[\frac{\Theta'(x)}{\Theta(x)}\right] = \mathfrak{I} - k^2 sn^2 x,$$

de sorte qu'il ne reste plus qu'à former les dérivées successives de sn^2x. Je représente par ν une quantité égale à zéro ou à l'unité suivant que n est pair ou impair, et par $F(sn^2x)$, $G(sn^2x)$, deux polynomes qui soient par rapport à sn^2x, de degrés $\frac{n-\nu}{2}$ et $\frac{n+\nu-4}{2}$. Cela étant on trouve par un calcul facile :

$$f(x) = F(sn^2x) + snx\, cnx\, dnx\, G(sn^2x).$$

D'une manière semblable, en désignant par $f_1(x), f_2(x), f_3(x)$ les fonctions de seconde espèce, qui ont respectivement les multiplicateurs de $sn\,x$, $cn\,x$, $dn\,x$ nous obtenons les formules suivantes ; où $F(sn^2x)$ et $G(sn^2x)$ sont des degrés $\frac{n+\nu-2}{2}$ et $\frac{n-\nu-2}{2}$, en sn^2x :

$$f_1(x) = snx\, F(sn^2x) + cnx\, dnx\, G(sn^2x),$$

$$f_2(x) = cnx\, F(sn^2x) + snx\, dnx\, G(sn^2x),$$

$$f_3(x) = dnx\, F(sn^2x) + snx\, cnx\, G(sn^2x).$$

Ces expressions mettent en évidence la partie paire et la partie impaire que nous aurons toujours à employer séparément, le pôle d'ordre n appartenant à celle des deux parties qui est de même parité que la fonction. J'en ferai une première application en me proposant de parvenir aux formules de Jacobi pour la transformation ; je supposerai à cet effet que n soit impair et que les nombres entiers a, b, c, d, satisfassent aux conditions :

$$a \equiv 1,\ b \equiv 0,\ c \equiv 0\quad d \equiv 1,\ \text{Mod } 2.$$

Les équations de la page (280) montrent alors que les fonctions $P(x)$, $Q(x)$, $R(x)$, $S(x)$, sont du type de $f_1(x)$ $f_2(x)$, $f_3(x)$ et $f(x)$; la première étant impaire et toutes les autres paires ; le nombre que nous avons désigné par ν est égal à l'unité, on a donc d'après ce que nous venons d'établir :

$$P(x) = snx\left[A + A'sn^2x + \dots + \dots + A^{\left(\frac{n-1}{2}\right)} sn^{n-1}x\right],\quad R(x) = dnx\left[C + C'sn^2x + \dots + \dots + C^{\left(\frac{n-1}{2}\right)} sn^{n-1}x\right]$$

$$Q(x) = cnx\left[B + B'sn^2x + \dots + \dots + B^{\left(\frac{n-1}{2}\right)} sn^{n-1}x\right],\quad S(x) = D + D'sn^2x + \dots + \dots + D^{\left(\frac{n-1}{2}\right)} sn^{n-1}x,$$

et les formules pour la transformation deviennent :

$$sn\left(\frac{x}{M}, l\right) = \frac{sn\,x\,[A + A'sn^2x + A''sn^4x + \cdots + A^{(\frac{n-1}{2})}sn^{n-1}x]}{D + D'sn^2x + \cdots + \cdots + D^{(\frac{n-1}{2})}sn^{n-1}x}$$

$$cn\left(\frac{x}{M}, l\right) = \frac{cn\,x\,[B + B'sn^2x + \cdots + B^{(\frac{n-1}{2})}sn^{n-1}x]}{D + D'sn^2x + \cdots + D^{(\frac{n-1}{2})}sn^{n-1}x}$$

$$dn\left(\frac{x}{M}, l\right) = \frac{dn\,x\,[C + C'sn^2x + \cdots + C^{(\frac{n-1}{2})}sn^{n-1}x]}{D + D'sn^2x + \cdots + D^{(\frac{n-1}{2})}sn^{n-1}x}$$

Je passe à un second cas qui a été précédemment traité, où l'on a les conditions :

$$a \equiv 1,\ b \equiv 0 \quad c \equiv 1, \quad d \equiv 1, \quad \text{Mod } 2.$$

Les fonctions $P(x)$, $Q(x)$ $R(x)$, $S(x)$, se rapportent alors à $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f(x)$ et $f_3(x)$; nous obtenons donc les expressions suivantes :

$$sn\left(\frac{x}{M}, l\right) = \frac{sn\,x\,[A + A'sn^2x + \cdots + A^{(\frac{n-1}{2})}sn^{n-1}x]}{dn\,x\,[D + D'sn^2x + \cdots + D^{(\frac{n-1}{2})}sn^{n-1}x]}$$

$$cn\left(\frac{x}{M}, l\right) = \frac{cn\,x\,[B + B'sn^2x + \cdots + B^{(\frac{n-1}{2})}sn^{n-1}x]}{dn\,x\,[D + D'sn^2x + \cdots + D^{(\frac{n-1}{2})}sn^{n-1}x]}$$

$$dn\left(\frac{x}{M}, l\right) = \frac{C + C'sn^2x + \cdots + C^{(\frac{n-1}{2})}sn^{n-1}x}{dn\,x\,[D + D'sn^2x + \cdots + D^{(\frac{n-1}{2})}sn^{n-1}x]}$$

On reconnait qu'elles s'accordent avec les résultats établis à la page en observant que le nombre désigné par ξ prend les valeurs, $1, 5, 9, \ldots 4(n-1)+1$ parmi lesquelles se trouve $\xi = n$, ou bien $\xi = 3n$, suivant que $n \equiv 1$ ou $n \equiv 3$ Mod 4. On a donc ces deux cas $sn^2\xi\omega = sn\,K = 1$; la quantité $1 - k^2 sn^2\xi\omega\, sn^2x$ devenant alors dn^2x, chacune des trois sommes contient un terme divisé par $dn\,x$ que nous voyons en effet figurer en facteur dans le dénominateur commun de ces expressions.

Je supposerai en dernier lieu $n = 2$, et je prendrai d'abord :

$$a = 1, \quad b = 0, \quad c = 0, \quad d = 2$$

de manière à avoir :

$$\frac{K}{M} = L$$

$$\frac{K'}{M} = 2L'$$

Le nombre ν est alors égal à zéro, et l'on a sur le champ :

$$P(x) = A\,sn\,x,$$

$$Q(x) = B\,cn\,x\,dn\,x,$$

$$R(x) = C + C'sn^2x,$$

$$S(x) = D + D'sn^2x,$$

cela étant, écrivons pour plus de simplicité, avec d'autres constantes g et h:

$$sn\left(\frac{x}{M}, l\right) = \frac{A\, sn\, x}{1+g\, sn^2 x}$$

$$cn\left(\frac{x}{M}, l\right) = \frac{B\, cn x\, dn x}{1+g\, sn^2 x}$$

$$dn\left(\frac{x}{M}, l\right) = \frac{C\,(1+h\, sn^2 x)}{1+g\, sn^2 x}.$$

On trouve d'abord $B=1$, $C=1$, en supposant $x=0$; changeons ensuite x en $x+iK'$ dans la première et la troisième de ces équations, nous aurons ainsi d'après la condition $\frac{K'}{M} = 2L$:

$$\frac{A\, sn\, x}{1+g\, sn^2 x} = \frac{A k\, sn\, x}{g+k^2 sn^2 x}$$

$$\frac{1+h\, sn^2 x}{1+g\, sn^2 x} = \frac{h+k^2 sn^2 x}{g+k^2 sn^2 x}.$$

ce qui donne immédiatement les valeurs, $g=k$, $h=-k$. Enfin je remplace dans l'expression de $sn\left(\frac{x}{M}, l\right)$, x par $x+2K$; au moyen de la relation élémentaire $sn(x+K) = \frac{cn x}{dn x}$, nous obtiendrons une nouvelle égalité:

$$\frac{cn x\, dn x}{1-k\, sn^2 x} = \frac{A\, cn x\, dn x}{dn^2 x + k\, cn^2 x}$$

$$= \frac{A\, cn x\, dn x}{(1+k)(1-k\, sn^2 x)}$$

d'où l'on tire, $A = \frac{1}{M} = 1+k$. Il ne reste plus ensuite que le module à obtenir il se conclut de la relation:

$$dn\left(\frac{x}{M}, l\right) = \frac{1-k\, sn^2 x}{1+k\, sn^2 x}.$$

en y faisant $x=K$; nous trouvons ainsi:

$$l' = \frac{1-k}{1+k}$$

et par conséquent:

$$l = \frac{2\sqrt{k}}{1+k}.$$

Nous en concluons pour la transformation de second ordre le système suivant de formules:

$$sn\left[(1+k)x, \frac{2\sqrt{k}}{1+k}\right] = \frac{(1+k)\, sn\, x}{1+k\, sn^2 x},$$

$$cn\left[(1+k)x, \frac{2\sqrt{k}}{1+k}\right] = \frac{cn x\, dn x}{1+k\, sn^2 x},$$

$$dn\left[(1+k)x, \frac{2\sqrt{k}}{1+k}\right] = \frac{1-k\, sn^2 x}{1+k\, sn^2 x}.$$

Soit enfin,

$$a=2,\quad b=0,\quad c=0,\quad d=1,$$

c'est à dire :

$$\frac{K}{M}=2L,$$

$$\frac{K'}{M}=L',$$

on trouve alors :

$$P(x)=A\,sn\,x\,cn\,x,$$
$$Q(x)=B+B'sn^2x,$$
$$R(x)=C+C'sn^2x,$$
$$S(x)=D\,dn\,x,$$

et nous pourrons immédiatement écrire :

$$sn\left(\frac{x}{M},l\right)=\frac{A\,sn\,x\,cn\,x}{dn\,x},$$

$$cn\left(\frac{x}{M},l\right)=\frac{1+f\,sn^2x}{dn\,x},$$

$$dn\left(\frac{x}{M},l\right)=\frac{1+g\,sn^2x}{dn\,x}$$

Cela étant, je change d'abord x en $x+K$ dans les deux dernières égalités ; la condition $\frac{K}{M}=2L$, donne ainsi :

$$\frac{1+f\,sn^2x}{dn\,x}=-\frac{1+f\,sn^2(x+k)}{dn(x+k)}$$
$$=-\frac{1+f-(k^2+f)\,sn^2x}{k'\,dn\,x},$$

nous aurons semblablement :

$$\frac{1+g\,sn^2x}{dn\,x}=\frac{1+g-(k^2+g)\,sn^2x}{k'\,dn\,x},$$

on en déduit :

$$1=-\frac{1+f}{k'},\quad 1=\frac{1+g}{k'}$$

d'où :

$$f=-1-k',\quad g=-1+k'.$$

On parvient à de nouvelles conditions en remplaçant x par $x+iK'$ dans la première et la seconde équation ; au moyen de la relation $\frac{K'}{M}=L'$ on obtient :

$$\frac{1}{l\,sn\left(\frac{x}{M},l\right)}=\frac{A\,dn\,x}{k^2 sn\,x\,cn\,x},$$

d'où :

$$sn\left(\frac{x}{M},l\right)=\frac{k^2 sn\,x\,cn\,x}{Al\,dn\,x}$$

et par conséquent :

$$A=\frac{k^2}{Al}$$

Je trouve ensuite en recourant à la formule élémentaire

$$cn(x+iK')=\frac{dnx}{ik\,snx}:$$

$$\frac{1+g\,sn^2x}{Al\,snx\,cnx}=-\frac{f+k^2sn^2x}{k^2snx\,cnx}$$

ce qui donne d'après la valeur de f:

$$1=\frac{Al(1+k^2)}{k^{2'}}$$

Nous en concluons facilement

$$A=\frac{1}{M}=1+k',$$

$$l=\frac{1-k'}{1+k'};$$

Voici donc le second système de formules qui découle de là pour la transformation du second ordre :

$$sn\left[(1+k')x,\frac{1-k'}{1+k'}\right]=\frac{(1+k')snx\,cnx}{dnx},$$

$$cn\left[(1+k')x,\frac{1-k'}{1+k'}\right]=\frac{1-(1+k')sn^2x}{dnx},$$

$$dn\left[(1+k')x,\frac{1-k'}{1+k'}\right]=\frac{1-(1-k')sn^2x}{dnx},$$

On en déduit comme on va voir les expressions de $sn\,2x$, $cn\,2x$ et $dn\,2x$. Je remplace à cet effet le module k par $\frac{2\sqrt{k}}{1+k}$, ce qui donne $\frac{1-k'}{1+k'}=k$ et: $1+k'=\frac{2}{1+k}$. Je change ensuite x en $(1+k)x$; la première des équations précédentes devient ainsi :

$$sn\,2x=\frac{2\,sn\left[(1+k)x,\frac{2\sqrt{k}}{1+k}\right]cn\left[(1+k)x,\frac{2\sqrt{k}}{1+k}\right]}{(1+k)\,dn\left[(1+k)x,\frac{2\sqrt{k}}{1+k}\right]}$$

et l'on en conclut au moyen des formules du premier système, la valeur suivante :

$$sn\,2x=\frac{2\,snx\,cnx\,dnx}{1-k^2sn^4x}$$

Un calcul semblable conduit aux autres relations :

$$cn\,2x=\frac{1-2\,sn^2x+k^2sn^4x}{1-k^2sn^4x},$$

$$dn\,2x=\frac{1-2k^2sn^2x+k^2sn^4x}{1-k^2sn^4x},$$

Nous remarquerons qu'on en tire facilement :

$$\frac{1-cn\,2x}{1+dn\,2x}=sn^2x$$

et par conséquent :

$$\frac{1-cnx}{1+dnx}=sn^2\frac{x}{2}.$$

Au moyen de cette égalité l'équation,

$$dn\left[(1+k)x, \frac{2\sqrt{k}}{1+k}\right] = \frac{1-k\,sn^2x}{1+k\,sn^2x}$$

prend une autre forme lorsqu'on y change x en $\frac{x}{2}$. Elle devient ainsi :

$$dn\left[\frac{(1+k)x}{2}, \frac{2\sqrt{k}}{1+k}\right] = \frac{1-k+dnx+k\,cnx}{1+k+dnx-k\,cnx},$$

en remplaçant ensuite au dénominateur, $dnx - k\,cnx$ par $\frac{1-k^2}{dnx+k\,cnx}$, on trouve après une réduction facile, ce résultat fort simple

$$dn\left[\frac{(1+k)x}{2}, \frac{2\sqrt{k}}{1+k}\right] = \frac{dnx+k\,cnx}{1+k}$$

Je terminerai cette addition à la théorie des fonctions elliptiques en donnant la démonstration du théorème de Mr. Picard qui a été énoncé page 81. Il consiste en ce qu'une fonction holomorphe $G(z)$ est nécessairement constante s'il existe deux constantes finies a et b, telles que les équations $G(z)=0$ $G(z)=b$, n'aient aucune solution.

d'où résultent les formules :

$$sn^2\left[\frac{(1+k)x}{2}, \frac{2\sqrt{k}}{1+k}\right] = \frac{1}{2}\left(1+k\,sn^2x - cnx\,dnx\right)$$

$$cn^2\left[\frac{(1+k)x}{2}, \frac{2\sqrt{k}}{1+k}\right] = \frac{1}{2}\left(1-k\,sn^2x + cnx\,dnx\right)$$

Soit $G(z)=u$, et construisons, comme on l'a fait p. 52 la courbe qui représente la succession des valeurs de u, lorsque la variable z décrit un contour fermé S. Cette courbe qu'on a nommée l'image de S peut offrir des points multiples en nombre quelconque, mais n'a point de branches infinies $G(z)$ étant holomorphe, elle aura donc pour limite un contour fermé T. Cela étant je dis que T ne comprendra jamais à son intérieur le point particulier $u=a$, si l'équation $G(z)=a$ est supposée n'admettre aucune solution. Imaginons en effet, qu'on diminue les dimensions du contour S, en le faisant varier d'une manière continue jusqu'à la réduire à un point. Les images qui sont données par la fonction $G(z)$ se déformeront aussi de manière à se réduire à un seul point. Par conséquent tout point A contenu à l'intérieur de T se trouve à un certain moment sur l'une des images déformées. C'est dire que A correspond à une certaine détermination de z, et ne peut avoir la valeur a, si l'on suppose que l'équation $G(z)=a$ n'a point de solution.

Ceci posé, considérons le quotient $\frac{K'}{K}$, et rappelons qu'il représente une fonction holomorphe de k^2, à l'égard d'un contour quelconque ne comprenant pas les points $k^2=0$ et $k^2=1$. Soit ensuite pour un moment : $F(z) = \frac{G(z)-a}{b-a}$ de manière à avoir une fonction qui ne prendra jamais les valeurs zéro et l'unité, et faisons dans $\frac{K'}{K}$ la substitution $k^2=F(z)$. On obtient ainsi une fonction $f(z)$ qui est holomorphe dans tout le plan, l'image donnée par le module d'un contour décrit par la variable z ne pouvant plus offrir aucune discontinuité. Je

dis maintenant que cette fonction est nécessairement constante, et que par conséquent il en est de même de $F(z)$, ou de $G(z)$. Nous savons en effet, que pour toute valeur réelle ou imaginaire du module, la partie réelle de $\frac{K'}{K}$ est positive, c'est le théorème de Riemann dont la démonstration a été donnée p. 237. On voit donc que si l'on pose $f(z) = X + iY$, le module de $e^{f(z)}$ est toujours moindre que l'unité; cela étant, la proposition obtenue p. 82 nous permet de conclure que cette fonction est constante, comme il s'agissait de l'établir.

2me Addition.

Les dérivées des fonctions elliptiques par rapport au module, ont une grande importance, voici une méthode facile pour les obtenir.

Différentions par rapport à k la relation :

$$\int_0^z \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}} = x,$$

on obtient immédiatement :

$$\frac{D_k z}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}} + \int_0^z \frac{kz^2\,dz}{(1-k^2z^2)\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}} = 0,$$

et par conséquent

$$D_k\, sn x = -k\, cnx\, dnx \int_0^x \frac{sn^2 x}{dn^2 x}\, dx,$$

ou encore :

$$D_k\, snx = \frac{k\, cnx\, dnx}{k'^2} \int_0^x cn^2(x+K)\, dx.$$

Cela posé, l'équation de Jacobi :

$$k^2 sn^2 x = \frac{J}{K} - D_x \frac{\Theta'(x)}{\Theta(x}$$

donne, si l'on change x en $x+K$:

$$k^2 sn^2(x+K) = \frac{J}{K} - D_x \frac{\Theta_1'(x)}{\Theta_1(x)}$$

puis :

$$k^2 cn^2(x+K) = D_x \frac{\Theta_1'(x)}{\Theta_1(x)} + k^2 - \frac{J}{K},$$

et enfin en intégrant à partir de $x = 0$:

$$\int_0^x k^2 cn^2(x+K)\, dx = \frac{\Theta_1'(x)}{\Theta_1(x)} + \left(k^2 - \frac{J}{K}\right)x.$$

Nous avons donc pour la dérivée du sinus d'amplitude par rapport au module la formule :

$$D_k\, sn\, x = -\frac{cnx\, dnx}{k\, k'^2}\left[\frac{\Theta_1'(x)}{\Theta_1(x} + \left(k^2 - \frac{J}{K}\right)x\right].$$

et au moyen des équations $cn^2x = 1 - sn^2x$, $dn^2x = 1 - k^2 sn^2 x$, on en tire les suivantes :

$$D_k\, cnx = + \frac{snx\, dnx}{k k^2}\left[\frac{\Theta_1'(x)}{\Theta_1(x)} + \left(k^2 - \frac{J}{K}\right)x\right]$$

$$D_k\, dnx = - \frac{k\, sn^2x}{dnx} + \frac{k\, snx\, dnx}{k'^2}\left[\frac{\Theta_1'(x)}{\Theta_1(x)} + \left(k^2 - \frac{J}{K}\right)x\right].$$

La dernière en employant la relation :

$$\frac{H_1'(x)}{H_1(x)} - \frac{\Theta_1'(x)}{\Theta_1(x)} = - \frac{k'^2 snx}{cnx\, dnx}$$

peut s'écrire plus simplement :

$$D_k\, dnx = \frac{k\, snx\, cnx}{k'^2}\left[\frac{H_1'(x)}{H_1(x)} + \left(k^2 - \frac{J}{K}\right)x\right].$$

Enfin si l'on introduit dans ces trois expressions la fonction $\frac{\Theta'(x)}{\Theta(x)}$, ou plutôt la quantité :

$$\int_0^x k^2 sn^2 x\, dx = \frac{Jx}{K} - \frac{\Theta'(x)}{\Theta(x)} = U(x),$$

on parvient aux formules :

$$k k'^2 D_k\, snx = + k^2 snx\, cn^2x + cnx\, dnx\,[U(x) - k^2x]$$
$$k k'^2 D_k\, cnx = - k^2 sn^2x\, cnx - snx\, dnx\,[U(x) - k^2x]$$
$$k k'^2 D_k\, dnx = - k^2 sn^2x\, dnx - k^2 snx\, cnx\,[U(x) - k^2x].$$

Je remarquerai qu'on conclut des deux premières :

$$kk'^2 \frac{D_k\,(cnx + i\, cnx)}{i\,(cnx + i\, snx)} = k^2 snx\, cnx + dnx\,[U(x) - k^2x],$$

nous avons donc pour la dérivée de l'amplitude de l'argument, l'expression :

$$kk'^2 D_k\, amx = k^2 snx\, cnx + dnx\,[U(x) - k^2x].$$

A ces résultats je me propose maintenant de joindre la valeur de $D_k\, U(x)$ dont le calcul demande un peu plus de développements, la question étant d'intégrer par rapport à x, la quantité $D_k\,(k^2 sn^2x)$ qui s'exprime ainsi :

$$kk'^2 D_k\,(k^2 sn^2x) = 2k^2 k'^2 sn^2x + 2k'^2 sn^2x\, cn^2x + 2k^2 snx\, cnx\, dnx\,[U(x) - k^2x].$$

A cet effet, j'écris pour abréger, U, U', U'', au lieu de $U(x), D_x U(x), D_x^2 U(x)$, et observant qu'on a :

$$k^2 sn^2x = U'$$
$$k^2 cn^2x = k^2 - U'$$
$$2k^2 snx\, cnx\, dnx = U'',$$

je mets cette quantité sous la forme :

$$kk'^2 D_k\,(k^2 sn^2x) = 2k'^2 U' + 2U'(k^2 - U') + U''(U - k^2x).$$

Enfin, je remplace le dernier terme $U''(U - k^2x)$ par :

$$D_x\, U'(U - k^2x) + U'(k^2 - U')$$

nous obtenons ainsi : $$kk'^2 D_k\,(k^2 sn^2x) = 2k'^2 U' + 3U'(k^2 - U') + D_x\, U'(U - k^2x),$$

et par conséquent :

$$kk'^2 D_k U(x) = (2k'^2+3k^2)U - 3\int_0^x U'^2 dx + U'(U-k^2x),$$

de sorte que l'intégrale $\int_0^x U'^2 dx$ nous reste seule à évaluer. C'est ce que nous ferons en décomposant en éléments simples la fonction $U'^2 = k^4 sn^4 x$, qui a pour périodes $2K$, $2iK'$ et pour pôle principal unique $x = iK$. Nous avons donc un seul élément simple $\frac{\Theta'(x)}{\Theta(x)}$, dans la formule qui par suite s'obtiendra au moyen du développement de $k^4 sn^4 x$, en posant $x = iK' + \varepsilon$.

Or on a :

$$k^4 sn^4(iK'+\varepsilon) = \frac{1}{sn^4\varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon^4} + \frac{2(1+k^2)}{3}\frac{1}{\varepsilon^2},$$

et cette partie qui contient seulement les puissances négatives de ε, mise sous forme canonique étant :

$$-\frac{1}{6}D_\varepsilon^3\frac{1}{\varepsilon} - \frac{2(1+k^2)}{3}D_\varepsilon\frac{1}{\varepsilon}$$

nous en concluons :

$$k^4 sn^4 x = -\frac{1}{6}D_x^3\frac{\Theta'(x)}{\Theta(x)} - \frac{2(1+k^2)}{3}D_x\frac{\Theta'(x)}{\Theta(x)} + C$$

ou bien :

$$k^4 sn^4 x = \frac{1}{6}D_x^3 U(x) + \frac{2(1+k^2)}{3}D_x U(x) + C.$$

La constante se détermine sur le champ en supposant $x = 0$. On trouve ainsi $C = -\frac{k^2}{3}$; cela étant, il vient pour l'intégrale cherchée, la valeur :

$$\int_0^x U'^2 dx = \frac{1}{6}U'' + \frac{2(1+k^2)}{3}U - \frac{k^2x}{3}$$

et nous tirons l'expression suivante :

$$kk'^2 D_k U(x) = UU' - k^2(U + xU') + k^2(x - snx\,cnx\,dnx).$$

Je vais en indiquer une conséquence importante. Soit en désignant par m et m' des nombres entiers :

$$G = 2mK + 2m'iK', \quad H = 2mJ + 2m'iJ',$$

et posons $\xi = x + G$. On aura l'égalité :

$$U(\xi) = U(x) + H,$$

qui donnera en différentiant par rapport au module :

$$U'(\xi)D_k G + D_k U(\xi) = D_k U(x) + D_k H.$$

Retranchant maintenant membre à membre les équations :

$$kk'^2 D_k U(\xi) = U(\xi)U'(\xi) - k^2[U(\xi) + \xi U'(\xi)] + k^2(\xi - sn\xi\,cn\xi\,dn\xi)$$

$$kk'^2 D_k U(x) = U(x)U'(x) - k^2[U(x) + xU'(x)] + k^2(x - snx\,cnx\,dnx),$$

et observant qu'on a :

$$U(\xi) = U(x) + H, \; U'(\xi) = U'(x), \; sn\xi\,cn\xi\,dn\xi = snx\,cnx\,dnx$$

on trouvera par des réductions faciles :

$$kk'^2[D_k U(\xi) - D_k U(x)] = (H - k^2G)U'(x) - k^2(H - G).$$

Nous obtenons donc pour résultat de la differentiation par rapport au module l'équation suivante :

$$[kk'^2 D_k G + H - k^2 G] U'(x) - kk'^2 D_k H - k^2(H-G) = 0,$$

qui se partage ainsi :

$$kk'^2 D_k G = k^2(G-H),$$
$$kk'^2 D_k H = k^2(G-H),$$

et les intégrales complètes de ces deux équations differentielles sont manifestement :

$$G = \alpha K + \beta K'$$
$$H = \alpha J + \beta J',$$

α et β désignant deux constantes arbitraires.

Ces résultats conduisent aisement, comme on va voir, aux dérivées prises par rapport à k des trois autres fonctions de seconde espèce analogues à $U(x)$, à savoir :

$$U_1(x) = \frac{Jx}{K} - \frac{H'(x)}{H(x)},$$
$$U_2(x) = \frac{Jx}{K} - \frac{H_1'(x)}{H_1(x)},$$
$$U_3(x) = \frac{Jx}{K} - \frac{\Theta_1'(x)}{\Theta_1(x)}.$$

Je pars à cet effet des relations :

$$U_1(x) = U(x+iK') - iJ'$$
$$U_2(x) = U(x+K+iK') - J - iJ',$$
$$U_3(x) = U(x+K) - J,$$

qu'on peut comprendre dans la formule :

$$U_n(x) = U(x+A) - B,$$

en désignant par A et B les mêmes combinaisons linéaires de K et K' d'une part, de J et J' de l'autre, de sorte qu'on a :

$$kk'^2 D_k A = k^2 A - B$$
$$kk'^2 D_k B = k^2(A-B).$$

Cela posé, et en faisant encore $\xi = x + A$, de la relation :

$$D_k U_n(x) = U'(\xi) D_k A + D_k U(\xi) - D_k B$$

je tire d'abord :

$$\begin{aligned} kk'^2 D_k U_n(x) = {} & kk'^2 U'(\xi) D_k A + U(\xi) U'(\xi) \\ & - k^2[U(\xi) + \xi U'(\xi)] + k^2(\xi - \operatorname{sn}\xi \operatorname{cn}\xi \operatorname{dn}\xi) \\ & - kk'^2 D_k B. \end{aligned}$$

Remplaçant ensuite dans le second membre $U(\xi)$, $U'(\xi)$ par $U_n(x)+B$, $U_n'(x)$ et ξ par $x+A$, j'obtiens en groupant convenablement les termes

$$\begin{aligned} kk'^2 D_k U_n(x) = {} & U_n(x) U_n'(x) - k^2 U_n(x) \\ & + [kk'^2 D_k A + B - k^2(x+A)] U_n'(x) \\ & + k^2 [x - \operatorname{sn}(x+A) \operatorname{cn}(x+A) \operatorname{dn}(x+A)] \\ & - kk'^2 D_k B + k^2(A-B), \end{aligned}$$

puis en réduisant :

$$kk'^2 D_k U_n(x) = U_n(x) U_n'(x) - k^2 [U_n(x) + x U_n'(x)] + k^2 [x - sn(x+A) cn(x+A) dn(x+A)].$$

On voit que pour les diverses valeurs de n, les formules ne diffèrent que par un seul terme, le dernier qui pour $n=1$ doit être successivement :

$$+ \frac{cnx\, dnx}{k^2 sn^3 x}, + \frac{k'^2 snx\, dnx}{k^2 cn^3 x}, + \frac{k' snx\, cnx}{dn^3 x}.$$

Je remarquerai en dernier que l'intégration par rapport à x donne, C étant une constante :

$$2kk'^2 D_k \int U_n(x) dx = U_n^2(x) - 2k^2 x U_n(x) + k^2 [x^2 - sn^2(x+A)] + C,$$

nous avons donc l'expression de la dérivée par rapport à k des fonctions de M. Weierstrass, qui sont définies par l'équation : $D_x \log Al(x)_n = U_n(x)$. Et comme on déduit de cette condition :

$$D_x^2 \log Al(x)_n = U_n'(x) = -U'(x+A) = -k^2 sn^2(x+A),$$

la relation précédente prend cette nouvelle forme :

$$-2kk'^2 D_k \log Al(x)_n = [D_x \log Al(x)_n]^2 + 2k^2 x D_x \log Al(x)_n + D_x^2 \log Al(x)_n + k^2 x^2 + c,$$

puis en simplifiant :

$$2kk'^2 D_k Al(x)_n + D_x^2 Al(x)_n + 2k^2 x\, Al(x)_n + (k^2 x^2 + c) Al(x)_n = 0.$$

Dans cette équation linéaire aux différences partielles dont la découverte est due à M. Weierstrass, la constante C qui reste à obtenir varie seule avec l'indice n. Soit d'abord $x=0$, on a en exceptant le cas de $n=1$, $Al(0)_n = 1$ et l'on trouve immédiatement $C = -D_x^2 Al(x)_n$, ou ce qui est la même chose dans l'hypothèse $x=0$: $C = D_x^2 \log Al(x)_n = -k^2 sn^2 A$.

Nous prendrons donc successivement pour $n = 0, 2, 3$ les valeurs qui correspondent à $A = 0, K + iK', K$, c'est-à-dire : $C = 0, 1, k^2$. Supposant ensuite $n=1$, on dérivera d'abord par par rapport à x l'équation aux différences partielles, et en faisant ensuite $x=0$, on obtiendra la condition :

$$C + 2k^2 = -D_x^3 Al(x)_1 = 1 + k^2,$$

d'où la valeur : $C = k'^2$.

3me Addition.

La théorie des intégrales Euleriennes est liée étroitement à la série de quatre éléments ou série hypergéométrique que Gauss a introduite en analyse, en la représentant par $F(a, b, c, x)$ et définit par la relation :

$$F(a,b,c,x) = 1 + \frac{ab}{1.c} x + \frac{a(a+1)b(b+1)}{1.2.c(c+1)} x + \cdots + \frac{a(a+1)\ldots(a+n-1)b(b+1)\ldots(b+n-1)}{1.2\ldots n\; c(c+1)\ldots(c+n-1)} x^n + \cdots$$

Si l'on suppose $x = 1$, on a en effet comme Gauss l'a découvert

$$F(a, b, c, 1) = \frac{\Gamma(o)\,\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\,\Gamma(c-b)}.$$

C'est ce théorème qui est d'une grande importance dont je vais donner la démonstration et indiquer quelques conséquences.

J'envisage à cet effet l'intégrale définie :

$$J = \int_0^1 z^{a-1}(1-z)^{c-a-1}(1-zx)^{-b}\,dz,$$

et son développement suivant les puissances de x, auquel on parvient immédiatement par la formule du binôme :

$$(1-zx)^{-b} = \sum \frac{b(b+1)\dots(b+n-1)}{1.2\dots n}\,x^n$$

$$(n = 0, 1, 2, 3. \quad)$$

Si nous posons : $J = J_1 + J_1 x + \dots + J_n x^n + \dots$

on a ainsi :

$$J_n = \frac{b(b+1)\dots(b+n-1)}{1.2\dots n}\int_0^1 z^{a+n-1}(1-z)^{c-a-1}\,dz,$$

et d'après la valeur de l'intégrale Eulerienne de première espèce :

$$J_n = \frac{b(b+1)\dots(b+n-1)\,\Gamma(a+n)\,\Gamma(c-a)}{1.2\dots n.\,\Gamma(c+n)}$$

Employons encore les relations élémentaires :

$$\Gamma(a+n) = a(a+1)\dots(a+n-1)\,\Gamma(a),$$

$$\Gamma(c+n) = c(c+1)\dots(c+n-1)\,\Gamma(a),$$

et nous pourrons écrire :

$$J_n = \frac{\Gamma(a)\,\Gamma(c-a)}{\Gamma(c)}\;\frac{a(+1)\dots(a+n-1)b(b+1)\dots(b+n-1)}{1.2.\dots n\,c(c+1)\dots(c+n-1)}$$

Cette valeur de J_n nous donne l'expression de l'intégrale définie par la série de Gauss ; on en conclut en effet :

$$\int_0^1 z^{a-1}(1-z)^{c-a-1}(1-zx)^{-b}\,dz = \frac{\Gamma(a)\,\Gamma(c-a)}{\Gamma(c)}\,F(a,b,c,x)$$

Soit maintenant $x = 1$, le premier membre devenant $\int_0^1 z^{a-1}(1-z)^{c-a-b-1}\,dz$, est égal à $\frac{\Gamma(a)\,\Gamma(c-a-b)}{F(c-\ -b)}$, d'où le théorème qu'il s'agissait de démontrer.

$$\frac{\Gamma(c)\,\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\,\Gamma(c-b)} = F(a, b, c, 1).$$

Je vais maintenant en présenter les applications. En rappelant d'abord que la série :

$$F(a,b,c,1) = 1 + \frac{ab}{1.c} + \frac{a(a+1)\,b(b+1)}{1.2\,c\,(c+1)} + \text{etc.}$$

est convergente, sous la condition :

$$c > a + b,$$

je suppose $c = 1$ et $b = -a$; nous aurons donc pour toute valeur de a :

$$\frac{1}{\Gamma(1+a)\Gamma(1-a)} = \frac{\sin a\pi}{a\pi}$$

$$= 1 - \frac{a^2}{1} + \frac{a^2(a^2-1)}{(1.2)^2} - \frac{a^2(a^2-1)(a^2-4)}{(1.2.3)^2} + \dots$$

$$-(-1)^n \frac{a^2(a^2-1)(a^2-4)\dots(a^2-n^2)}{(1.2\dots n+1)^2} + \dots$$

Soit ensuite $c = \frac{1}{2}$ avec la même condition $b = -a$; la relation :

$$\Gamma\left(\frac{1+a}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1-a}{2}\right) = \frac{\pi}{\cos\frac{a\pi}{2}}$$

nous donnera par un calcul facile après avoir remplacé a par $\frac{a}{2}$;

$$\cos\frac{a\pi}{2} = 1 - \frac{a^2}{1.2} + \frac{a^2(a^2-4)}{1.2.3.4} - \frac{a^2(a^2-4)(a^2-16)}{1.2.3.4.5.6} + \dots$$

$$-(-1)^n \frac{a^2(a^2-4)(a^2-16)\dots(a^2-4n^2)}{1.2.3\dots\dots.2n+2.} + \dots$$

Je m'arrêterai un moment à l'expression de $\sin a\pi$, afin de montrer qu'elle est une transformation identique de la formule d'Euler :

$$\frac{\sin a\pi}{a\pi} = \left(1 - \frac{a^2}{1}\right)\left(1 - \frac{a^2}{4}\right)\left(1 - \frac{a^2}{9}\right)\dots$$

Soit en effet :

$$X_n = \left(1 + \frac{x}{\alpha_1}\right)\left(1 + \frac{x}{\alpha_2}\right)\dots\left(1 + \frac{x}{\alpha_n}\right),$$

de sorte qu'on ait :

$$X_{n+1} = \left(1 + \frac{x}{\alpha_{n+1}}\right)X_n$$

ou bien :

$$X_{n+1} - X_n = \frac{x}{\alpha_{n+1}} X_n$$

Formons maintenant les égalités successives :

$$X_2 - X_1 = \frac{x}{\alpha_2} X_1$$

$$X_3 - X_2 = \frac{x}{\alpha_3} X_2$$

$$\dots\dots\dots\dots$$

$$X_{n+1} - X_n = \frac{x}{\alpha_{n+1}} X_n.$$

et ajoutons membre à membre. La relation à laquelle on parvient :

$$X_{n+1} = X_1 + \frac{x}{\alpha_2} X_1 + \frac{x}{\alpha_3} X_2 + \dots + \frac{x}{\alpha_{n+1}} X_n$$

donne lorsqu'on suppose n infini la transformation en une serie du produit d'un nombre infini de facteurs, et l'on en tire la conclusion que j'ai annoncée en prenant

$$\alpha_n = n^2 \text{ et } x = -a^2.$$

